И. А. Соловьев, В. В. Шевелев
А. В. Червяков, А. Ю. Репин

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Кратные интегралы
Теория поля
Теория функций комплексного переменного
Обыкновенные дифференциальные уравнения

ЛАНЬ

И. А. СОЛОВЬЕВ, В. В. ШЕВЕЛЕВ,
А. В. ЧЕРВЯКОВ, А. Ю. РЕПИН

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

▪

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

▪

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

▪

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

▪

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

▪

РЕКОМЕНДОВАНО Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям: 510000 — «Естественные науки и математика», 550000 — «Технические науки», 540000 — «Педагогические науки»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2009

ББК 22.161
С 60

**Соловьев И. А., Шевелев В. В.,
Червяков А. В., Репин А. Ю.**

С 60 Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Кратные интегралы, теория поля, теория функций комплексного переменного, обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0907-5

Пособие посвящено практическому освоению теоретического материала по следующим разделам высшей математики: кратные интегралы, основы векторного анализа, элементы теории функций комплексного переменного, обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы с основами теории устойчивости.

Предлагается последовательное изучение методов решения основных задач по каждому разделу. Имеется большое количество задач для самостоятельного решения, которые снабжены ответами. Пособие содержит расчетно-графические задания по всем рассмотренным темам.

В пособии излагаются основы высшей математики, поэтому оно может быть полезным для студентов инженерных специальностей, университетов, академий, технических, экономических, финансовых и экологических вузов как очной, так и заочной или дистанционной форм обучения. Расчетно-графические задания могут использоваться преподавателями в качестве заданий для самостоятельной внеаудиторной работы.

ББК 22.161

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2009
© И. А. Соловьев, В. В. Шевелев,
А. В. Червяков, А. Ю. Репин, 2009
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с Государственным образовательным стандартом учебными планами всех математических, технических, экономических и многих других специальностей предусмотрено изучение основ высшей математики, которые затем используются в прикладных дисциплинах. Предлагаемое учебное пособие предназначено, в первую очередь, для студентов инженерных специальностей, но оно может быть полезно и для студентов экономических и других специальностей как очной, так и заочной и дистанционной форм обучения.

В настоящем пособии осуществлена попытка соединить воедино материалы, связанные с теоретическими сведениями, подробными решениями типовых задач, а также задач повышенной трудности, задач, снабженных только ответами для самостоятельной работы, как в аудиториях, так и вне них. Кроме того, приведены контрольные расчетно-графические задания, предназначенные для самостоятельной внеаудиторной работы. Среди рассмотренных задач имеется как набор основных традиционных задач, которые необходимы для начального освоения теоретического материала, так и новые задачи, ранее не входившие в существующие сборники задач.

В главе 1 рассматриваются вопросы, связанные с кратным интегрированием. Подробно рассмотрены двойные и тройные интегралы с геометрическими и физическими приложениями, разбирается формула замены переменных, вводятся основные определения, связанные с интегрированием

в n-мерном пространстве, а также несобственное интегрирование.

Глава 2 посвящена основам векторного анализа. Рассмотрены криволинейные и поверхностные интегралы, формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского. Рассмотрены основные векторные операции первого и второго порядков в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

В главе 3 рассмотрены элементы теории функций комплексного переменного: комплексные числа и действия над ними, дифференцирование и интегрирование комплексных функций, теорема и формула Коши, теория вычетов и основы операционного исчисления.

В главе 4 разбираются вопросы, связанные с обыкновенными дифференциальными уравнениями и их системами. Подробно рассмотрены основные виды дифференциальных уравнений I и II порядков, решаемых в квадратурах: линейные, однородные, уравнения Бернулли, Эйлера, Клеро. Отдельный параграф посвящен теории устойчивости.

В конце учебного пособия приводится большой набор расчетно-графических заданий, предназначенных для самостоятельной работы по всем представленным разделам. Каждое отдельное задание содержит по 30 задач.

В конце учебного пособия представлены ответы к задачам для аудиторной и внеаудиторной работы для самостоятельного решения.

ГЛАВА 1

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1.1. ЖОРДАНОВА МЕРА ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ Ω

Рассмотрим сначала прямоугольник $P = \{(x, y): x \in [a, b], b > a, y \in [c, d], d > c\} = [a, b] \times [c, d]$. По определению, жорданова мера прямоугольника P равна $\mu(P) = (b - a)(d - c)$.

Определение 1.1. Множество E точек плоскости имеет жорданову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$, существует такое к о н е ч н о е покрытие этого множества прямоугольниками P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), что

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) < \varepsilon.$$

В случае произвольного ограниченного плоского множества Ω заключаем его в прямоугольник P: $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, $P \supset \Omega$. Далее производим разбиение отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ и проводим прямые $x = x_i$, $y = y_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), параллельные координатным осям. Этим построением образуется n^2 прямоугольников P_{ij}: $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $y \in [y_{j-1}, y_j]$ с жордановой мерой $\mu(P_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

На рис. 1.1 показан случай $n = 5$.

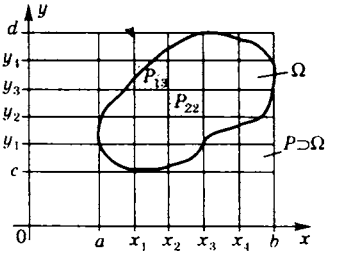

Рис. 1.1

Рассмотрим ступенчатые фигуры $S_n^{(i)}$ и $S_n^{(e)}$. $S_n^{(i)}$ состоит из прямоугольников P_{ij}, целиком принадлежащих Ω (вписанная в Ω ступенчатая фигура), $S_n^{(e)}$ состоит из прямоугольников, имеющих с Ω хотя бы

одну общую точку (описанная около Ω ступенчатая фигура). По определению считаем

$$\mu(S_n^{(I)}) = \sum_{i,j} \mu(P_{ij}), \tag{1.1}$$

$$\mu(S_n^{(e)}) = \sum_{i,j} \mu(P_{ij}). \tag{1.2}$$

В формуле (1.1) суммирование осуществляется по всем прямоугольникам P_{ij}, целиком принадлежащим Ω. В формуле (1.2) суммируются меры $\mu(P_{ij})$ тех прямоугольников, которые имеют хотя бы одну общую точку с областью Ω.

Пусть теперь $n \to \infty$ и $\max\limits_i\{\Delta x_i\} \to 0$, $\max\limits_j\{\Delta y_j\} \to 0$.

Определение 1.2. Верхней (внешней) мерой Жордана плоской области называется число $\mu(S^{(e)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(S_n^{(e)})$.

Нижней (внутренней) мерой Жордана области Ω называется число $\mu(S^{(I)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(S_n^{(I)})$.

Определение 1.3. Плоская область Ω называется квадрируемой или измеримой по Жордану, если $\mu(S^{(e)}) = \mu(S^{(I)})$. При этом полагают

$$\mu(\Omega) = \mu(S^{(e)}) = \mu(S^{(I)}). \tag{1.3}$$

В общем случае справедливо неравенство $\mu(S^{(e)}) \geqslant \mu(S^{(I)})$. Существует критерий измеримости области Ω по Жордану, для формулировки которого введем еще одно определение.

Определение 1.4. Множество E точек плоскости имеет Лебегову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$, существует счетное покрытие этого множества прямоугольниками P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) < \varepsilon$.

Теорема 1.1 (критерий измеримости по Жордану). Пусть Ω — плоская область, $\partial\Omega$ — граница области Ω. Для измеримости области Ω по Жордану необходимо и достаточно, чтобы Лебегова мера $\partial\Omega$ равнялась нулю.

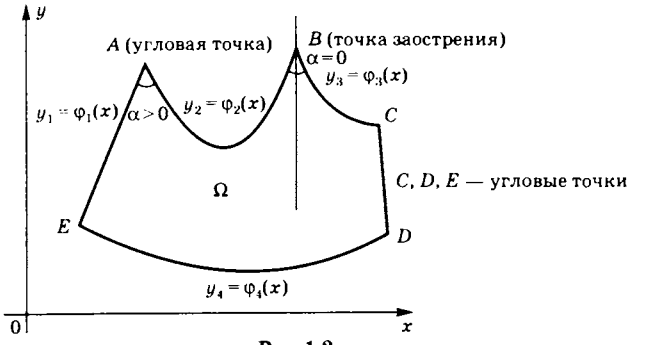

Рис. 1.2

Замечание 1.1. Области Ω, имеющие гладкие или кусочно-гладкие границы $\partial\Omega$, измеримы по Жордану.

Напомним, что кусочно-гладкие границы могут быть представлены функциями $y_i = \varphi_i(x)(x_i = \psi_j(y))$ с непрерывно меняющейся производной, за исключением некоторого конечного набора угловых точек, или точек заострения (рис. 1.2).

1.1.2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА ПО ПРЯМОУГОЛЬНИКУ D

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана на прямоугольнике $P = \{(x, y): x \in [a, b], y \in [c, d], a < b, c < d\}$. Произведем разбиение P на прямоугольники P_{ij} так же, как это сделано в пункте 1.1.1. Обозначим

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in P_{ij}} (f(x, y)); \quad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in P_{ij}} (f(x, y)) \tag{1.4}$$

и введем в рассмотрение суммы

$$\overline{I_n} = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\mu(P_{ij}) \tag{1.5}$$

$$\underline{I_n} = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\mu(P_{ij}). \tag{1.6}$$

В суммах (1.5), (1.6) перейдем к пределу при $n \to \infty$,

$$\max_{i=1,\ldots,n} \{\Delta x_i\} \to 0, \quad \max_{j=1,\ldots,n} \{\Delta y_j\} \to 0$$

или $d = \max d_{ij} \to 0$, где $d_{ij} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$. В результате получим верхний и нижний интеграл Римана функции $f(x, y)$ по прямоугольнику P:

$$\overline{\iint_P} f(x, y)dxdy = \overline{I} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \overline{I_n}, \tag{1.7}$$

$$\underline{\iint_P} f(x, y)dxdy = \underline{I} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \underline{I_n}. \tag{1.8}$$

Определение 1.5. Функция $z = f(x, y)$ называется интегрируемой по Риману на прямоугольнике P, если выполняется равенство

$$\overline{I} = \underline{I}, \tag{1.9}$$

а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется двойным интегралом Римана этой функции на прямоугольнике P и обозначается

$$\iint_P f(x, y)dxdy = \overline{I} = \underline{I}. \tag{1.10}$$

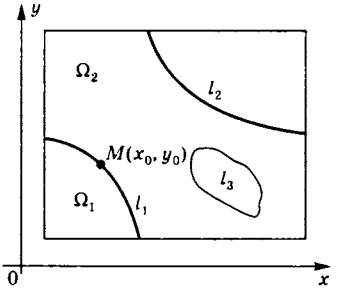

Рис. 1.3

Теорема 1.2 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $z = f(x, y)$ кусочно-непрерывна на прямоугольнике P, то она интегрируема на нем (рис. 1.3 поясняет понятие кусочной непрерывности функции $f(x, y)$):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to M \\ (x,y)\in\Omega_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to M \\ (x,y)\in\Omega_2}} f(x, y).$$

1.1.3. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ИЗМЕРИМОМУ ПО ЖОРДАНУ МНОЖЕСТВУ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на множестве Ω, измеримом по Жордану. Заключим Ω в некоторый прямоугольник P: $P \supset \Omega$ (рис. 1.4). Это возможно, поскольку измеримое по Жордану множество ограничено.

Введем в рассмотрение функцию $z_0 = f_0(x, y)$, полагая

$$z_0 = f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \subset \Omega; \\ 0, & \text{если } (x, y) \subset P/\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

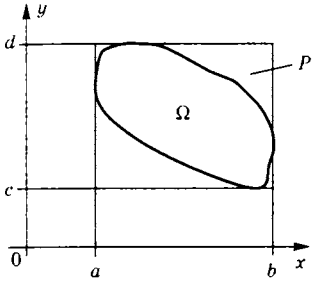

Рис. 1.4

Определение 1.6. Функция $z = f(x, y)$ называется интегрируемой по Риману на множестве Ω, если интегрируема на $P \supset \Omega$ функция $z_0 = f_0(x, y)$, при этом полагают

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{P} f_0(x, y)dxdy. \tag{1.12}$$

1.1.4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА НА ИЗМЕРИМОМ ПО ЖОРДАНУ МНОЖЕСТВЕ Ω

Пусть Ω — измеримое по Жордану множество, $f(x, y)$: $\Omega \to R$ — интегрируемая на Ω функция, тогда имеют место следующие свойства:

1) Сужение функции $z = f(x, y)$ на $\Omega_1 \subset \Omega$ (Ω_1 — измеримое по Жордану подмножество Ω) интегрируемо на Ω_1:

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy \Rightarrow \exists \iint\limits_{\Omega_1} f(x, y)dxdy (\Omega_1 \subset \Omega).$$

2) Если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \wedge \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ (Ω_1, Ω_2 измеримы по Жордану), тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x, y)dxdy \tag{1.13}$$

(свойство аддитивности).

3) Если $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ интегрируемы по Риману на Ω, $\alpha, \beta \in R$, тогда $\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)$ интегрируема на Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y))dxdy = \alpha \iint\limits_{\Omega} f_1(x, y)dxdy + \beta \iint\limits_{\Omega} f_2(x, y)dxdy \tag{1.14}$$

(свойство линейности).

4) Если $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ интегрируемы по Риману на Ω, то $f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)$ также интегрируема на Ω:

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f_1(x, y)dxdy \wedge \exists \iint\limits_{\Omega} f_2(x, y)dxdy \Rightarrow \iint\limits_{\Omega} f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)dxdy.$$

5) Если $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ интегрируемы по Риману на Ω и $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y) \quad M(x, y) \in \Omega$, то

$$\iint\limits_{\Omega} f_1(x, y)dxdy \leqslant \iint\limits_{\Omega} f_2(x, y)dxdy. \tag{1.15}$$

6) Если $f(x, y)$ интегрируема на Ω, то

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy \right| \leqslant \iint\limits_{\Omega} |f(x, y)|\, dxdy. \tag{1.16}$$

7) Если $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы по Риману на $\Omega \wedge g(x, y) \geqslant 0$ $(g(x, y) \leqslant 0) \quad M(x, y) \in \Omega$, то $\exists \lambda \in R$:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)g(x, y)dxdy = \lambda \iint\limits_{\Omega} g(x, y)dxdy. \tag{1.17}$$

Если при этом $f(x, y)$ непрерывна на

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \, (f(x, y) \in C(\bar{\Omega})),$$

тогда $\exists M_0(\xi, \eta) \in \bar{\Omega}$: $\lambda = f(\xi, \eta)$ и

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)g(x, y)dxdy = f(\xi, \eta) \iint\limits_{\Omega} g(x, y)dxdy \tag{1.18}$$

(теорема о среднем значении).

1.1.5. ПРИВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Пусть $z = f(x, y)$ задана на прямоугольнике P: $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3 (теорема Фубини). Пусть функция $z = f(x, y)$ интегрируема по Риману на P и $\forall x \in [a, b]$ существует

$$\int\limits_{c}^{d} f(x, y)dy = \varphi(x),$$

тогда функция $\varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и при этом справедливо равенство

$$\iint\limits_P f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right). \quad (1.19)$$

Последний интеграл в формуле (1.19) называется повторным интегралом, причем внутреннее интегрирование осуществляется по переменной y (x фиксируется на отрезке $[a, b]$), внешнее интегрирование проводится по переменной x. Соответственно, переформулировав теорему Фубини, можно свести двойной интеграл к повторному в обратном порядке:

$$\iint\limits_P f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right) = \int\limits_c^d dy\left(\int\limits_a^b f(x, y)dx\right). \quad (1.20)$$

Если теперь Ω — произвольное измеримое по Жордану плоское множество с кусочно-гладкой границей (см. замечание 1.1 и рис. 1.2), тогда оно может быть представлено в виде объединения множеств Ω_i и Ω_j ($\mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$), выпуклых в направлении оси OY или оси OX. Иными словами, каждое Ω_i представимо или в виде

$$\Omega_i = \{(x, y) \in R^2:\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ y_{i-1}(x) \leqslant y \leqslant y_i(x)\},$$

или в виде

$$\Omega_j = \{(x, y) \in R^2:\ y \in [y_{j-1}, y_j],\ x_{j-1}(y) \leqslant x \leqslant x_j(y)\}.$$

На рис. 1.5 показаны области Ω_i и Ω_j.

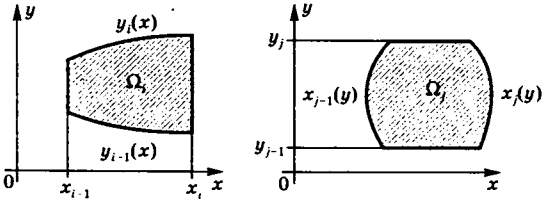

Рис. 1.5

Двойные интегралы по измеримым множествам Ω_i, Ω_j с учетом сказанного в пункте 1.1.3, а также теоремы 1.3, определяются следующим образом:

$$\iint\limits_{\Omega_i} f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_{i\,1}}^{x_i} dx \left(\int\limits_{y_{i\,1}(x)}^{y_i(x)} f(x,y)dy \right), \tag{1.21}$$

$$\iint\limits_{\Omega_j} f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_{j\,1}}^{y_j} dy \left(\int\limits_{x_{j\,1}(y)}^{x_j(y)} f(x,y)dx \right). \tag{1.22}$$

В дальнейшем применяется свойство 2) (аддитивность двойного интеграла).

Если область Ω одновременно выпукла по оси OY и по оси OX, тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega_i} f(x,y)dxdy &= \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) = \\ &= \int\limits_c^d dy \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right), \end{aligned} \tag{1.23}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y):\, x \in [a,b],\, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\} = \\ &= \{(x,y):\, y \in [c,d],\, x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Замечание 1.2. В теореме 1.3 условие интегрируемости функции $z = f(x, y)$ в P существенно. Рассмотрим простой пример из книги [21], в котором это условие нарушается. Пусть в $P = \{(x, y):\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & 1 \geqslant y > x > 0, \\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1 \geqslant x > y > 0, \\ 0, & x = y,\ x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$$

Рассчитаем повторные интегралы от этой функции:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^x \left(-\frac{1}{x^2}\right)dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}dy \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(-\frac{y}{x^2}\right)\Big|_0^x + \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)dx = -1.$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{y^2}\right)\Big|_0^y + \left(\frac{1}{x}\right)\Big|_y^1 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\right)dy = 1.$$

Повторные интегралы не совпадают. Произошло это потому, что заданная функция $z = f(x, y)$ не ограничена в P и, следовательно, двойной интеграл от нее не существует.

Замечание 1.3. Рассмотрим пример области Ω, не являющейся простой (или выпуклой) ни по оси OY, ни по оси OX. На рис. 1.6 показана кольцевая область Ω с внутренним радиусом r и внешним $R\,(R > r)$.

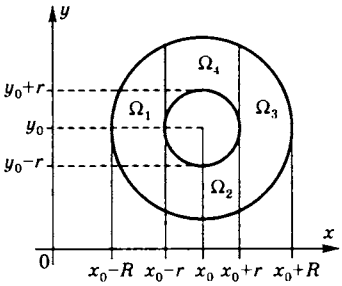

Рис. 1.6

Эта область двумя прямыми $x = x_0 - r$, $x = x_0 + r$ разрезается на четыре подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_i \wedge \mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4.$$

Каждая из подобластей Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ является выпуклой по оси OY. Граница Ω задается двумя окружностями:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Если на Ω задана функция $z = f(x, y)$, интегрируемая по Риману на Ω, то практическое вычисление двойного интеграла сведется к сумме четырех интегралов по частичным областям Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_3} f\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_4} f\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{x_0-R}^{x_0-r} dx \int\limits_{y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} dx \int\limits_{y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} f(x,y)dy +$$

$$+ \int\limits_{x_0+r}^{x_0+R} dx \int\limits_{y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{x_0-r}^{x_0+r} dx \int\limits_{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}} f(x,y)dy.$$

1.1.6. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть $f(x, y)$: $\Omega \to R$ — ограниченная функция на плоском измеримом по Жордану множестве Ω и Ω_i — частичные измеримые по Жордану подобласти ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \wedge \mu(\Omega_i \cup \Omega_j) = 0 \ (i \neq j).$$

Введем в рассмотрение

$$d_i = \sup_{M', M'' \in \Omega_i} \{\rho(M', M'')\}$$

и $d = \max\{d_i\}$ — диаметр частичной подобласти и диаметр разбиения Ω на частичные подобласти. Так же, как и в пункте 1.1.2, обозначим

$$M_i = \sup_{(x,y)\in\Omega_i} (f(x,y)); \quad m_i = \inf_{(x,y)\in\Omega_i} (f(x,y)) \tag{1.25}$$

и введем суммы

$$\overline{I_n} = \sum_{i,j=1}^{n} M_i \mu(\Omega_i), \tag{1.26}$$

$$\underline{I_n} = \sum_{i,j=1}^{n} m_i \mu(\Omega_i), \tag{1.27}$$

которые называются соответственно верхней и нижней интегральными суммами функции $f(x, y)$, соответствующими разбиению $\{\Omega_i\}$ с диаметром d. Далее вводятся верхний и нижний интегралы Римана по аналогии с пунктом 1.1.2:

$$\overline{I} = \overline{\iint_{\Omega}} f(x, y)dxdy = \inf_{\substack{\{\Omega_i\} \\ d \to 0}} \overline{I_n}, \tag{1.28}$$

$$\underline{I} = \underline{\iint_{P}} f(x, y)dxdy \quad \sup_{\substack{\{\Omega_i\} \\ d \to 0}} \underline{I_n}. \tag{1.29}$$

Sup и inf в формулах (1.28), (1.29) определяются по всевозможным разбиениям $\{\Omega_i\}$ с указанными в начале этого пункта свойствами.

Определение 1.7. Ограниченная функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по Риману на измеримом по Жордану множестве Ω, если выполняется равенство

$$\overline{I} = \underline{I},$$

а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется двойным интегралом Римана этой функции на Ω и обозначается

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y)dxdy. \tag{1.30}$$

Замечание 1.4. Введенное в этом пункте определение двойного интеграла является общим.

По сравнению с пунктом 1.1.3 теперь допускается произвольное разбиение $\{\Omega_i\}$ области Ω на измеримые подобласти Ω_i $(d \to 0)$.

1.1.7 ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА

Пусть на $\Omega' \subset R^2$ задано непрерывно-дифференцируемое отображение $\Omega' \to \Omega \subset R^2$:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned} \tag{1.31}$$

сопоставляющее каждой точке $(u, v) \in \Omega'$ взаимно однозначно точку $(x, y) \in \Omega$. Обратное преобразование $\Omega \to \Omega'$ будем обозначать

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Будем также считать, что якобиан преобразования (1.31) сохраняет знак в Ω, т. е.:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\neq 0,\quad (u,v)\in\Omega'. \tag{1.33}$$

Справедлива следующая формула:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=1, \tag{1.34}$$

где

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}.$$

При отображении (1.31) прямоугольник $P_{A'B'C'D'}\in\Omega'$ переходит в общем случае в криволинейный четырехугольник $K_{ABCD}\in\Omega$ (рис. 1.7). Разбиение Ω' на прямоугольники P'_{ij} прямыми $u=u_i$, $v=v_j$ индуцирует разбиение Ω на криволинейные четырехугольники K_{ij}.

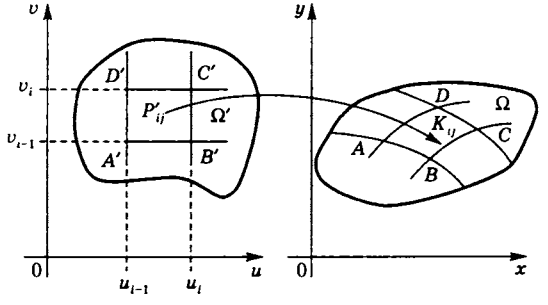

Рис. 1.7

Если $\Delta u_i=u_i-u_{i-1}\to 0\wedge\Delta v_j=v_j-v_{j-1}\to 0$, тогда справедливо предельное равенство

$$\lim_{\sqrt{\Delta u_i^2+\Delta v_j^2}\to 0}\frac{\mu(K_{ij})}{\mu(P'_{ij})}=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{\substack{u=u_i\\ v=v_j}}=\pm\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \tag{1.35}$$

Геометрический смысл знака якобиана преобразования $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ следующий. При положительном значении $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}>0$ пары малых векторов $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ со-

храняют ориентацию (правая пара переходит в правую, левая — в левую). Если $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} < 0$, ориентация указанных пар меняется на противоположную.

Теорема 1.4. Пусть на измеримом по Жордану множестве Ω задана непрерывная функция $f(x, y)$. Тогда образ Ω' множества Ω при отображении (1.32) также измерим, функция $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ непрерывна на Ω' и справедлива следующая формула замены переменных:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} F(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv. \tag{1.36}$$

Рассмотрим некоторые распространенные случаи замены переменных.

а) Полярные координаты:

$$\begin{gathered}(\rho,\varphi)\to(x,y),\\ x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ \rho\geqslant 0,\quad \varphi\in[0,2\pi].\end{gathered} \tag{1.37}$$

Формулы для обратного преобразования:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y\geqslant 0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0,\\ 2\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ \dfrac{3\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases} \tag{1.38}$$

Якобиан преобразования (1.37):

Якобиан обратного преобразования (1.38) в соответствии с формулой (1.34) равен

$$\frac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)}=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{1.40}$$

б) Обобщенные полярные координаты:

$$x = a\rho\cos^{\alpha}\varphi,$$
$$y = b\rho\sin^{\alpha}\varphi;\ \ a, b, \alpha > 0.$$

В этом случае якобиан равен

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = ab\alpha\rho\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi. \tag{1.41}$$

1.2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.2.1. МЕРА ЖОРДАНА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

Построение меры Жордана в трехмерном пространстве аналогично построению ее на плоскости (см. пункт 1.1.1). Вместо прямоугольников P в пространстве рассматривают параллелепипеды $\Pi = \{(x, y, z): x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]\}$ с жордановой мерой

$$\mu(P) = (b-a)(d-c)(f-e). \tag{1.42}$$

Далее так же, как и в пункте 1.1.1, помещаем о г р а н и ч е н н о е множество $\Omega \subset R_3$ в параллелепипед Π: $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$; $e \leqslant z \leqslant f$ достаточно больших размеров. Построим разбиение отрезков $[a, b]$, $[c, d]$ и $[e, f]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, $e = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = f$ и проведем плоскости $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$, параллельные координатным плоскостям YOZ, XOZ, XOY. В результате этого построения образуются n^3 паралле-

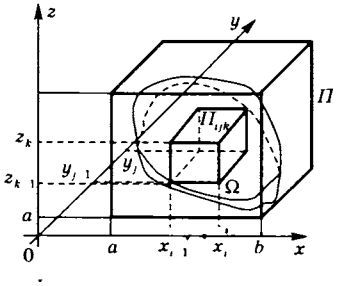

Рис. 1.8

лепипедов Π_{ijk}: $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $y \in [y_{j-1}, y_j]$, $z \in [z_{k-1}, z_k]$ с жордановой мерой $\mu(\Pi_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. На рис. 1.8 показана область Ω, помещенная в Π и один из Π_{ijk}.

Вводим в рассмотрение многогранные ступенчатые фигуры $V_n^{(I)}$ и $V_n^{(e)}$. $V_n^{(I)}$ составлена из параллелепипедов Π_{ijk}, целиком принадлежащих Ω, а $V_n^{(e)}$ — из параллелепипедов Π_{ijk}, имеющих хотя бы одну общую точку с Ω. По определению

$$\mu(V_n^{(I)}) = \sum_{i,j,k} \mu(\Pi_{ijk}), \tag{1.43}$$

$$\mu(V_n^{(e)}) = \sum_{i,j,k} \mu(\Pi_{ijk}). \tag{1.44}$$

В формуле (1.43) суммирование осуществляется по всем параллелепипедам, целиком принадлежащим $\Omega \subset R_3$, а в формуле (1.44) суммируются меры тех параллелепипедов, которые имеют хотя бы одну общую точку с множеством Ω. Число

$$d_n = \max_{ijk} \left\{ \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_k^2} \right\}$$

называется диаметром разбиения параллелепипеда Π (а вместе с ним и Ω).

Определение 1.8. Верхней (внешней) мерой Жордана пространственной области $\Omega \subset R_3$ называется число

$$\mu(V^{(e)}) = \lim_{\substack{d_n \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i,j,k} \mu(V_n^{(e)}). \tag{1.45}$$

Нижней (внутренней) мерой Жордана области $\Omega \subset R_3$ называется число

$$\mu(V^{(I)}) = \lim_{\substack{d_n \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i,j,k} \mu(V_n^{(I)}). \tag{1.46}$$

Определение 1.9. Пространственное множество $\Omega \subset R_3$ называется кубируемым или измеримым по Жордану, если $\mu(V^{(e)}) = \mu(V^{(I)})$, при этом полагают

$$\mu(\Omega) = \mu(V^{(e)}) = \mu(V^{(I)}). \tag{1.47}$$

Для пространственных множеств Ω справедлива теорема 1.1 и замечание 1.1 к ней с соответствующими изменениями в терминологии. В частности, кусочно-гладкие границы $\partial\Omega$ пространственных областей Ω могут быть представлены поверхностями $z = \varphi(x, y)$ $(x = \psi(y, z); y = \chi(z, x))$ с непрерывно меняющейся касательной плоскостью за исключением некоторого множества точек $\partial\Omega' \subset \partial\Omega$ с нулевой жордановой мерой $\mu(\partial\Omega') = 0$.

1.2.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА ПО ИЗМЕРИМОМУ МНОЖЕСТВУ Ω

Пусть $u = f(x, y, z)$: $\Omega \to R$ — ограниченная функция на пространственном измеримом по Жордану множестве Ω и Ω_i — частичные измеримые по Жордану подобласти ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \wedge \mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Вводим в рассмотрение числа

$$d_i = \sup_{M', M'' \in \Omega_i} \rho(M', M'') \text{ и } d = \max_i \{d_i\}$$

— диаметр частичной подобласти и диаметр разбиения Ω на частичные подобласти. Аналогично предыдущему (см. пункт 1.1.2, а также (1.25)) обозначаем

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{(x, y, z) \in \Omega_i} (f(x, y, z)), \\ m_i &= \inf_{(x, y, z) \in \Omega_i} (f(x, y, z)) \end{aligned} \tag{1.48}$$

и вводим суммы

$$\overline{I_n} = \sum_{i, j=1}^{n} M_i \mu(\Omega_i), \tag{1.49}$$

$$\underline{I_n} = \sum_{i, j=1}^{n} m_i \mu(\Omega_i), \tag{1.50}$$

которые называются соответственно верхней и нижней интегральными суммами функции $u = f(x, y, z)$, соответствующими разбиению $\{\Omega_i\}$ с диаметром d. Затем вводим верхний и нижний интегралы Римана так же, как это сделано в (1.28), (1.29):

$$\overline{I} = \overline{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz} = \inf_{\substack{\{\Omega_i\} \\ d \to 0}} \overline{I_n}, \tag{1.51}$$

$$\underline{I} = \underline{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz} = \sup_{\substack{\{\Omega_i\} \\ d \to 0}} \underline{I_n}. \tag{1.52}$$

Определение 1.10. Ограниченная функция $u = f(x, y, z)$ называется интегрируемой по Риману на измеримом по Жордану множестве $\Omega \subset R_3$, если $\overline{I} = \underline{I}$. Общее значение верхнего и нижнего интегралов называется тройным интегралом Римана этой функции на Ω и обозначается

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz. \tag{1.53}$$

Свойства 1–7, перечисленные в пункте 1.1.4, остаются справедливыми и для тройных интегралов. Также справедлива теорема Фубини из пункта 1.1.5 (теорема 1.3), формулировка которой требует некоторых дополнительных пояснений.

Рассмотрим прежде всего простую цилиндрическую область $\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in \Omega_{XOY}, z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$ (рис. 1.9).

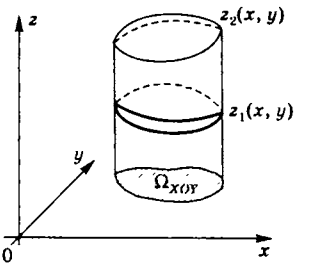

Рис. 1.9

Сверху и снизу это тело ограничено кусочно-гладкими поверхностями $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, которые однозначно проектируются на плоскость XOY (множество Ω_{XOY}). Сбоку Ω ограничена цилиндрической поверхностью с направляющей $\partial\Omega_{XOY}$, которая также предполагается кусочно-гладкой замкнутой кривой. Если существует тройной интеграл Римана от функции $f(x, y, z)$ по простой цилиндрической области Ω, а также для каждой точки $(x, y) \in \Omega_{XOY}$ существует интеграл

$$\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz,$$

тогда справедлива формула повторного интегрирования

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{\Omega_{XOY}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \quad (1.54)$$

Для простых цилиндрических областей в направлении осей OX и OY имеют место формулы аналогичные (1.54):

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{\Omega_{YOZ}} dydz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx, \quad (1.55)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{\Omega_{ZOX}} dzdx \int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} f(x, y, z)dy. \quad (1.56)$$

После вычисления внутренних интегралов в формулах (1.54)–(1.56) тройной интеграл сводится к двойному интегралу по проекции Ω на соответствующую координатную плоскость. В этом состоит практическое значение этих формул.

В случае произвольного измеримого по Жордану множества $\Omega \subset R_3$ всегда можно построить конечное разбиение его на простые цилиндрические области по осям координат Ω_i: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ и далее воспользоваться свойством аддитивности интеграла 2) из пункта 1.1.4, примененного к тройным интегралам.

1.2.3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

С помощью трех непрерывно дифференцируемых функций

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w), \\ y &= y(u, v, w), \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \quad (1.57)$$

можно ввести так называемые криволинейные координаты u, v, w точки $M(x, y, z)$, если эти функции определяют взаимно-однозначное преобразование областей Ω_1 (в пространстве переменных u, v, w) в Ω (в пространстве переменных x, y, z) (рис. 1.10).

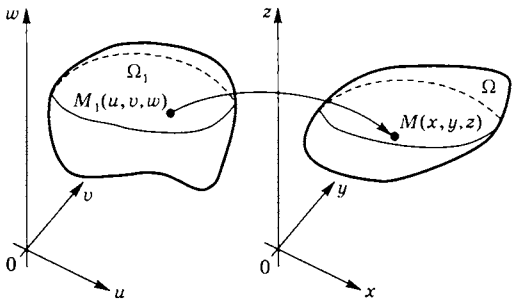

Рис. 1.10

Условие взаимной однозначности преобразования (1.57) можно получить из рассмотрения системы линейных уравнений для дифференциалов переменных x, y, z:

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv + x_w dw, \\ dy &= y_u du + y_v dv + y_w dw, \\ dz &= z_u du + z_v dv + z_w dw. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Определитель системы (1.58) называется якобианом преобразования (1.57):

$$\frac{\partial D(x,y,z)}{\partial D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}. \tag{1.59}$$

Как известно из формулы (1.29) части I*, при

$$\frac{\partial D(x,y,z)}{\partial D(u,v,w)} \neq 0$$

система (1.58) имеет единственное решение du, dv, dw при любых dx, dy, dz. Но это и означает локальную взаимную однозначность преобразования (1.57). Таким образом, если якобиан преобразования

$$\frac{\partial D(x,y,z)}{\partial D(u,v,w)}$$

* Здесь и далее часть I — это книга тех же авторов «Практическое руководство к решению задач по высшей математике: Линейная алгебра. Векторная алгебра...». СПб.: «Лань», 2007.

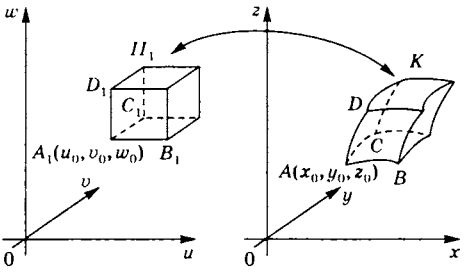

Рис. 1.11

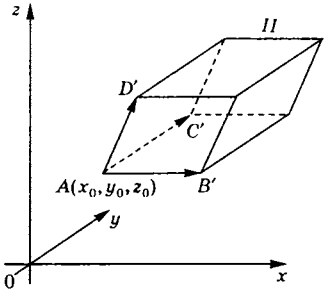

Рис. 1.12

сохраняет знак $(u, v, w) \in \Omega_1$, тогда формулы (1.57) задают взаимно однозначное соответствие между точками множеств Ω_1 и Ω.

Выясним геометрический смысл абсолютной величины якобиана (1.59) и его знака. Для этого рассмотрим преобразование достаточно малого параллелепипеда Π_1 в пространстве переменных u, v, w в пространство переменных x, y, z (рис. 1.11).

Малость параллелепипеда Π_1 означает, что его стороны $A_1B_1 = \Delta u$, $A_1C_1 = \Delta v$, $A_1D_1 = \Delta w$ являются бесконечно малыми величинами.

Образом Π_1 при преобразовании (1.57) будет некоторый шестигранник K, ограниченный поверхностями, в общем случае не являющимися плоскими. Чтобы упростить исследование, заменим шестигранник K косоугольным параллелепипедом Π (рис. 1.12), который является образом Π_1 при отображении (1.58), являющегося линейной частью преобразования (1.57):

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = x_u(u_0, v_0, w_0)\tilde{u} + x_v(u_0, v_0, w_0)\tilde{v} + x_w(u_0, v_0, w_0)\tilde{w},\\
&\tilde{y} = y_u(u_0, v_0, w_0)\tilde{u} + y_v(u_0, v_0, w_0)\tilde{v} + y_w(u_0, v_0, w_0)\tilde{w},\\
&\tilde{z} = z_u(u_0, v_0, w_0)\tilde{u} + z_v(u_0, v_0, w_0)\tilde{v} + z_w(u_0, v_0, w_0)\tilde{w},\\
&\tilde{u} \in [u_0, u_0 + \Delta u],\quad \tilde{v} \in [v_0, v_0 + \Delta v],\quad \tilde{w} \in [w_0, w_0 + \Delta w].
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Объем параллелепипеда Π определим по формуле

$$\mu(\Pi) = \left|\vec{AB'} \cdot \vec{AC'} \cdot \vec{AD'}\right|. \tag{1.61}$$

Координаты векторов $\vec{AB'}$, $\vec{AC'}$, $\vec{AD'}$ без труда определяются из (1.60).

$$\begin{aligned}
&\vec{AB'} = (x_u(u_0, v_0, w_0)\Delta u,\ y_u(u_0, v_0, w_0)\Delta u,\ z_u(u_0, v_0, w_0)\Delta u),\\
&\vec{AC'} = (x_v(u_0, v_0, w_0)\Delta v,\ y_v(u_0, v_0, w_0)\Delta v,\ z_v(u_0, v_0, w_0)\Delta v),\\
&\vec{AD'} = (x_w(u_0, v_0, w_0)\Delta w,\ y_w(u_0, v_0, w_0)\Delta w,\ z_w(u_0, v_0, w_0)\Delta w).
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Следовательно,

$$\mu(\Pi) = \pm\Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta w \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| \mu(\Pi_1), \tag{1.63}$$

где $\mu(\Pi_1) = \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta w$ — объем прямоугольного параллелепипеда в пространстве u, v, w.

В пределе при $d = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} \to 0$ получаем основной результат

$$\lim_{d \to 0} \frac{\mu(\Pi)}{\mu(\Pi_1)} = \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right|.$$

Осталось выяснить геометрический смысл знака якобиана преобразования (1.57). Этот знак связан с ориентацией троек векторов $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_1C_1}$, $\vec{A_1D_1}$ и $\vec{AB'}$, $\vec{AC'}$, $\vec{AD'}$ (рис. 1.11, 1.12). Если эти тройки имеют одинаковую ориентацию (обе левые или обе правые), то якобиан преобразования (1.57) положителен во всех точках области Ω'. В случае противоположной ориентации якобиан имеет знак минус.

Разбиение области Ω' в пространстве u, v, w на параллелепипеды Π_{ijk} координатными плоскостями $u = u_i$, $v = v_i$, $w = w_i$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ индуцирует в пространстве

переменных x, y, z разбиение Ω (см. рис. 1.11) на шестигранники K_{ijk} поверхностями

$$\begin{aligned}
&\alpha_{u_i}: \quad x = x(u_i, v, w), \quad y = y(u_i, v, w), \quad z = z(u_i, v, w),\\
&\alpha_{v_j}: \quad x = x(u, v_j, w), \quad y = y(u, v_j, w), \quad z = z(u, v_j, w),\\
&\alpha_{w_k}: \quad x = x(u, v, w_k), \quad y = y(u, v, w_k), \quad z = z(u, v, w_k),\\
&i, j, k = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Каждый такой шестигранник в последующем заменяется на косоугольный параллелепипед (см. рис. 1.12). Основной результат, связанный с заменой переменных в тройном интеграле, сформулируем в следующей теореме.

Теорема 1.5. Пусть на измеримом по Жордану множестве $\Omega \subset R_3$ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тогда прообраз Ω' при отображении (1.57) также измерим, функция $F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ непрерывна на Ω' и справедлива формула замены переменных

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} F(u, v, w)\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| dudvdw. \tag{1.65}$$

Рассмотрим наиболее употребительные замены переменных в трехмерном пространстве.

а) Цилиндрические координаты:

$$\begin{gathered}
(r, \varphi, z) \to (x, y, z),\\
r \in [0, +\infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in (-\infty, +\infty),\\
x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \; z = z.
\end{gathered} \tag{1.66}$$

Координатные поверхности:

$$r = r_0 = \text{const},$$

$x^2 + y^2 = r_0^2$ — прямые круговые цилиндры, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi_0$$ — плоскости, проходящие через ось OZ,

$z = z_0 = \text{const}$ — плоскости, параллельные координатной плоскости OXY.

Геометрическое значение цилиндрических координат и малый шестигранник, вырезаемый этими поверхностями, показаны на рис. 1.13.

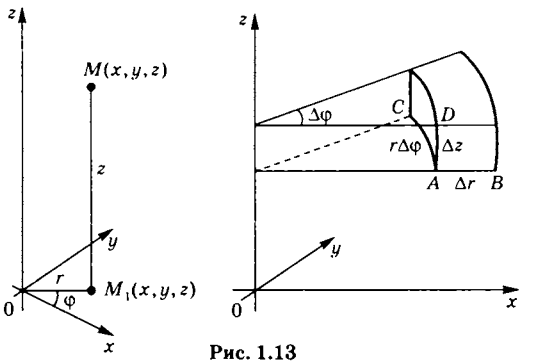

Рис. 1.13

Тройка векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ образует правый ортогональный базис ($AB = \Delta r$, $AC = r\Delta\varphi$, $AD = \Delta z$). Якобиан преобразования:

$$\frac{\partial D(x, y, z)}{\partial D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \qquad (1.67)$$

Формула перехода к цилиндрическим координатам:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz. \qquad (1.68)$$

б) Сферические координаты:

$$\begin{gathered} (\rho, \theta, \varphi) \to (x, y, z), \\ \rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{gathered} \qquad (1.69)$$

Координатные поверхности:

$$\rho = \rho_0 = \text{const},$$

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2{}_0$ — сферы радиуса ρ_0 с центром в начале координат, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$,

$\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi_0$ — плоскости, проходящие через ось OZ,

$$\theta = \theta_0 = \text{const},$$

$\operatorname{ctg}^2\theta_0(x^2 + y^2) = z^2$ — прямые круговые конусы с осью OZ.

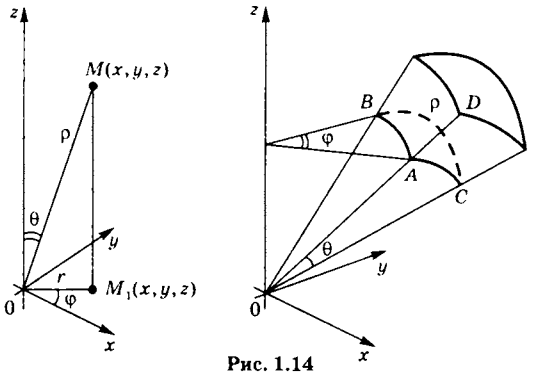

Рис. 1.14

Геометрическое значение сферических координат и малый шестигранник, вырезаемый этими поверхностями, показаны на рис. 1.14.

Тройка бесконечно малых векторов:

$$\vec{AB} = (-\rho\sin\theta\sin\varphi\Delta\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi\Delta\varphi,\ 0),$$

$$\vec{AC} = (\rho\cos\theta\cos\varphi\Delta\theta,\ \rho\cos\theta\sin\varphi\Delta\theta,\ -\rho\sin\theta\Delta\theta),$$

$$\vec{AD} = (\sin\theta\cos\varphi\Delta\rho,\ \sin\theta\sin\varphi\Delta\rho,\ \cos\theta\Delta\rho),$$

образует правый ортогональный базис в пространстве ($AB = \rho\Delta\theta$, $AC = \rho\sin\theta\Delta\varphi$, $AD = \Delta\rho$). Якобиан преобразования (1.69) рассчитаем обычным образом:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta. \quad (1.70)$$

Формула перехода к сферическим координатам:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho d\theta d\varphi. \quad (1.71)$$

в) Обобщенные сферические координаты.

В некоторых задачах вместо сферических координат (1.69) удобно использовать их обобщение:

$$x = a\rho\sin^{\alpha}\theta\cos^{\beta}\varphi,$$
$$y = b\rho\sin^{\alpha}\theta\sin^{\beta}\varphi,$$

$$z = c\rho\cos^{\alpha}\theta,$$
$$\rho \geqslant 0,\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{1.72}$$

Постоянные a, b, c, α, β выбираются надлежащим образом. Якобиан преобразования (1.72):

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\alpha\beta\rho^2\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{2\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi. \tag{1.73}$$

г) Обобщенные цилиндрические координаты.

Точно так же во многих задачах, связанных с вычислением тройных интегралов, удобно вместо цилиндрических координат (1.66) использовать их обобщенный вариант:

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi,$$
$$y = br\sin^{\alpha}\varphi,$$
$$z = z,$$
$$r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ z \in (-\infty, +\infty). \tag{1.74}$$

Постоянные a, b, α выбираются в соответствии с областью интегрирования Ω. Якобиан преобразования (1.74):

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = rab\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi. \tag{1.75}$$

1.3. ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1.3.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ

а) Вычисление меры множества, измеримого по Жордану.

Если $\Omega \subset R_2$ измеримо по Жордану, тогда его мера или площадь вычисляется по формуле

$$\mu(\Omega) = S_{\Omega} = \iint\limits_{\Omega} dxdy. \tag{1.76}$$

Если $\Omega \subset R_3$ измеримо по Жордану, тогда его мера или объем вычисляются с помощью тройного интеграла

$$\mu(\Omega) = V_{\Omega} = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz. \tag{1.77}$$

В частности, если тело $\Omega \subset R_3$ задается условиями

$$\Omega = \{(x, y, z):\ (x, y) \in \Omega_{XOY},\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\},$$

то его объем вычисляется по формуле

$$\mu(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iint_{\Omega_{XOY}} dxdy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_{\Omega_{XOY}} f(x, y)dxdy. \quad (1.78)$$

б) Вычисление площади куска гладкой поверхности, лежащей в R_3.

Пусть поверхность в R_3 задается параметрическими уравнениями

$$S:\ x = x(u, v),\quad y = y(u, v),$$
$$z = z(u, v),\quad (u, v) \in D. \quad (1.79)$$

Уравнения (1.79) задают гладкую поверхность в R_3, если функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют непрерывные частные производные по u, v ($(u, v) \in D$) и

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \forall (u, v) \in D. \quad (1.80)$$

Введем в рассмотрение коэффициенты Гаусса E, G, F по формулам

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad (1.81)$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Определение 1.11. Площадью куска гладкой поверхности S (1.79) называется интеграл

$$\mu(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv. \quad (1.82)$$

В частности, если поверхность можно задать с помощью явного уравнения $z = f(x, y)$, получаем ее параметризацию:

$$\begin{aligned} &x = u, \\ S:\ &y = u, \\ &z = f(u, v), \\ &(x, y) \in D, \\ &E = 1 + f_u^2,\ \ G = 1 + f_v^2,\ \ G = f_u f_v, \\ &EG - F^2 = (1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - f_u^2 f_v^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2, \\ &\mu(\Omega) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, dudv = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy. \end{aligned} \quad (1.83)$$

1.3.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Координаты центра тяжести пластинки $\Omega \subset R_2$ с поверхностной плотностью $p = p(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{M} \iint\limits_{\Omega} x \cdot p(x, y)dxdy, \\ Y_C &= \frac{1}{M} \iint\limits_{\Omega} y \cdot p(x, y)dxdy, \\ M &= \iint\limits_{\Omega} p(x, y)dxdy \ \text{(масса пластинки)}. \end{aligned} \tag{1.84}$$

2. Координаты центра тяжести тела $\Omega \subset R_3$ с объемной плотностью $p = p(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$ рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} x \cdot p(x, y, z)dxdydz, \\ Y_C &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} y \cdot p(x, y, z)dxdydz, \\ Z_C &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} z \cdot p(x, y, z)dxdydz, \\ M &= \iiint\limits_{\Omega} p(x, y, z)dxdydz \ \text{(масса тела)}. \end{aligned} \tag{1.85}$$

3. Моменты инерции пластины $\Omega \subset R_2$ относительно осей OX и OY вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_{\Omega} y^2 \cdot p(x, y)dxdy, \\ I_y &= \iint\limits_{\Omega} x^2 \cdot p(x, y)dxdy. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Центральный и центробежный моменты инерции рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_x + I_y \\ I_{xy} &= \iint\limits_{\Omega} xy \cdot p(x, y)dxdy. \end{aligned} \tag{1.87}$$

4. Моментами инерции тела $\Omega \subset R_3$ относительно координатных плоскостей называются интегралы:

$$I_{XOY} = \iiint_{\Omega} z^2 \cdot p(x, y, z)dxdydz,$$
$$I_{YOZ} = \iiint_{\Omega} x^2 \cdot p(x, y, z)dxdydz, \qquad (1.88)$$
$$I_{ZOX} = \iiint_{\Omega} y^2 \cdot p(x, y, z)dxdydz.$$

Моменты инерции тела Ω относительно осей OX, OY и OZ равны соответственно

$$I_x = I_{XOY} + I_{ZOX},$$
$$I_y = I_{XOY} + I_{YOZ}, \qquad (1.89)$$
$$I_z = I_{ZOX} + I_{YOZ}.$$

Моментом инерции тела $\Omega \subset R_3$ относительно начала координат называется

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot p(x, y, z)dxdydz = \qquad (1.90)$$
$$= I_{XOY} + I_{YOZ} + I_{ZOX}.$$

1.4. ОБЩИЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При построении меры множества Ω в n-мерном пространстве за основу берется так называемый n-мерный брус или n-мерный параллелепипед, формально определяемый набором условий для координат x_i:

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): \ x_i \in [a_i, b_i], \ i = 1, 2, \ldots, n\}. \qquad (1.91)$$

По определению, Жорданова мера бруса B равна

$$\mu(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \qquad (1.92)$$

Далее, по существу, повторяются все построения и определения, указанные в пункте 1.1 этой главы с заменой прямоугольников P_{ij} на брусы $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.

Если на брусе B задана непрерывная функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(B)$, то n-кратный интеграл от этой функции по B сводится к n-однократным интегралам по формуле

$$\int\limits_B f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1, dx_2, \ldots, dx_n =$$
$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n. \qquad (1.93)$$

В том случае, когда измеримое по Жордану множество $\Omega \subset R_n$ можно задать системой неравенств:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n):\ a \leqslant x_1 \leqslant b;\ x_2^{(L)}(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2^{(R)}(x_1);\\
&x_3^{(L)}(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant x_3^{(R)}(x_1, x_2);\ \ldots;\\
&x_{n-1}^{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) \leqslant x_{n-1} \leqslant x_{n-1}^{(R)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2});\\
&x_n^{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n^{(R)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\},
\end{aligned} \qquad (1.94)$$

n-мерный интеграл Римана от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по Ω сводится по теореме Фубини к n-однократным интегралам:

$$\int\limits_\Omega f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{x_2^{(L)}(x_1)}^{x_2^{(R)}(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{x_n^{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}^{x_n^{(R)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n. \qquad (1.95)$$

Если на $\Omega' \subset R_n$ задано непрерывно-дифференцируемое отображение $\Omega' \to \Omega \subset R_n$:

$$\begin{gathered}
x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\\
i = 1, 2, \ldots, n,\\
(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \subset \Omega',
\end{gathered} \qquad (1.96)$$

при этом считаем, что оно взаимнооднозначно:

$$\begin{gathered}
\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} \neq 0,\\
(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \subset \Omega' \subset R_n,
\end{gathered} \qquad (1.97)$$

тогда переход к новым переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в n-кратном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f(x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ \ldots,$$

$$x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n))\left|\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}\right| d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n. \tag{1.98}$$

В частности, при вычислении n-кратного интеграла Римана в некоторых случаях удобно переходить к сферическим координатам в пространстве R_n, которые вводятся по формулам:

$$\begin{gathered} x_1 = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1}, \\ x_j = \rho\cos\varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \sin\varphi_i, \\ j = 2, \ldots, n-1, \\ x_n = \rho\cos\varphi_{n-1}, \\ \rho \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \varphi_1 < \pi,\ \ j = 2, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{1.99}$$

Якобиан преобразования (1.99) равен

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}\varphi_j. \tag{1.100}$$

1.5. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение 1.12. Точка $M(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in R_n$ называется особой точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $\Omega\backslash\{M\} \to R$, если эта функция не ограничена в любой окрестности $O_\delta(M)$ этой точки.

Пусть $L \subset \Omega$ — множество всех особых точек функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В большинстве прикладных задач это множество состоит или из конечного числа точек, или является некоторой линией (незамкнутой или замкнутой), принадлежащей $\Omega \subset R_n$, в некоторых наиболее трудных случаях оно состоит из многомерных поверхностей.

В любом случае Жорданова мера этого множества равна нулю: $\mu(L) = 0$.

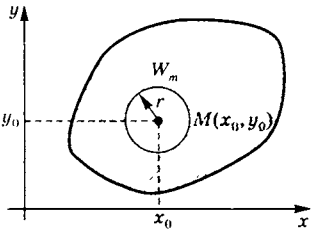

Рис. 1.15

$r = \frac{1}{m}$, W_m получается из W вырезанием круга радиуса $r = \frac{1}{m}$ с центром в точке M.

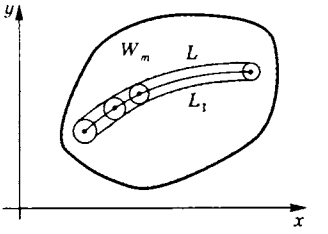

Рис. 1.16

W_m заштрихована. L — линия особых точек функции $f(x, y)$. L_1 — огибающая кругов с центрами, лежащими на L и с радиусами $r = \frac{1}{m}$.

Рассмотрим последовательность множеств $W_m \subset \Omega$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ W_m \text{ — измеримы по Жордану,} \\ &2)\ W_m \subset W_{m+1}, \\ &3)\ \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m = \Omega \setminus L. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Рис. 1.15, 1.16 поясняют введенные только что множества W_m в случае плоскости R_2.

Если множество W совпадает со всем пространством R_n: $W = R_n$, точно так же можно ввести в рассмотрение исчерпывающую последовательность множеств W_m, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ W_m \text{ — измеримы по Жордану,} \\ &2)\ W_m \subset W_{m+1}, \\ &3)\ \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m = R_n. \end{aligned} \tag{1.102}$$

В частности, в некоторых задачах в качестве W_m выбирают последовательность кругов

$$W_m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 < m^2\}.$$

Определение 1.13. Число I называется несобственным кратным интегралом I рода от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по всему пространству R_n, если для любой последовательности множеств (1.102) существуют интегралы

$$I_m = \int\limits_{W_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \qquad (1.103)$$

и имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} I_m = I.$$

Определение 1.14. Число I называется несобственным кратным интегралом II рода от неограниченной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на измеримом по Жордану множестве $\Omega \subset R_n$ с множеством особых точек $L \subset \bar{\Omega}$, если для любой последовательности множеств (1.101) существуют интегралы

$$I_m = \int\limits_{W_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \qquad (1.104)$$

и имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} I_m = I.$$

Замечание 1.5. Несобственные интегралы I и II рода обозначаются так же, как и обычные кратные интегралы:

$$I = \int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n,$$

и называются сходящимися, если выполняются определения 1.13 и 1.14. В противном случае они называются расходящимися.

Замечание 1.6. Для существования несобственного интеграла необходимо, чтобы $\mu(L) = 0$.

В заключение рассмотрим наиболее употребительные признаки сходимости несобственных интегралов I и II рода. Для простоты записи изложение проведем для двойных интегралов.

Теорема 1.6. Пусть функции $g(x, y)$ и $f(x, y)$ интегрируемы по Риману на множествах W_m (1.101) или (1.102) и пусть на Ω справедливы неравенства

$$0 \leqslant g(x, y) \leqslant f(x, y).$$

Тогда

1) если сходится интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$, то сходится и интеграл $\iint\limits_{\Omega} g(x, y)dxdy$;

2) если несобственный интеграл $\iint\limits_{\Omega} g(x, y)dxdy$ расходится, то расходится и интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$.

Следствие из теоремы 1.5. Пусть сходится несобственный интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(x, y)|\,dxdy$, тогда сходится интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$.

Определение 1.15. Если сходится интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} |f(x, y)|\,dxdy,$$

то говорят, что интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$ сходится абсолютно.

Теорема 1.7. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $\Omega \backslash L$, если сходится несобственный интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$, то он сходится абсолютно, т. е.

$$\iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy < +\infty.$$

Замечание 1.7. Теорема 1.7 сводит исследование сходимости несобственного интеграла любой кратности $n \geqslant 2$ к исследованию его абсолютной сходимости. В случае $n = 1$ теорема 1.7 не верна. Основная причина такого парадоксального явления для кратных интегралов состоит в том, что исчерпывающие последовательности W_m (1.101) и (1.102) характеризуются большим многообразием по сравнению с одномерными интегралами. В подтверждение сказанному можно рассмотреть следующий пример двойного несобственного интеграла.

Пусть $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ и $\Omega = \{(x, y)\colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Возьмем две исчерпывающие последовательности множеств $W_m^{(1)}$: $x \in [0, m]$, $y \in [0, m]$ (квадраты) и $W_m^{(2)}$: $x^2 + y^2 \leqslant m^2$ (четверть кругов), тогда

$$I_m^{(1)} = \iint\limits_{W_m^{(1)}} \cos(x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^m \cos x^2 dx \int\limits_0^m \cos y^2 dy - \int\limits_0^m \sin x^2 dx \int\limits_0^m \sin y^2 dy.$$

Учтем, что каждый из интегралов

$$\int_0^m \cos x^2 dx, \ldots, \int_0^m \cos y^2 dy$$

при $m \to \infty$ имеет пределом $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (см. часть II*), поэтому

$$\lim_{m\to\infty} I_m^{(1)} = 0.$$

С другой стороны, для четвертей круга получим:

$$I_m^{(2)} = \iint\limits_{W_m^{(2)}} \cos(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^m \rho\cos\rho^2 d\rho = \frac{\pi}{4}\sin m^2.$$

И в этом случае $\lim\limits_{m\to\infty} I_m^{(2)}$ не существует.

Обнаруженная зависимость пределов $I_m^{(1)}$ и $I_m^{(2)}$ от исчерпывающих областей $W_m^{(1)}$ и $W_m^{(2)}$ указывает по теореме 1.7 на то, что

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}} |\cos(x^2+y^2)|\,dxdy = +\infty.$$

Теорема 1.8. Пусть функция $f(x, y)$, определенная в R_2, такова, что

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = C \in R,$$

тогда несобственный интеграл $\iint\limits_{R_2} f(x,y)dxdy$ сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$.

Теорема 1.9. Пусть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ограниченной измеримой по Жордану области $\Omega\backslash(0, 0)$. Начало координат является единственной особой точкой в смысле определения 1.12. Если существует предел

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = C \in R,$$

то несобственный интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geqslant 2$.

---

* Здесь и далее часть II — это книга тех же авторов «Практическое руководство к решению задач по высшей математике: Интегрирование функций одной переменной...». СПб.: «Лань», 2008.

Замечание 1.8. В случае трехмерного пространства справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1.8, 1.9 с заменой $f(x, y) \to f(x, y, z)$, $x^2 + y^2 \to x^2 + y^2 + z^2$, $\alpha > 3 (\alpha \leqslant 3)$ $[\alpha < 3 (\alpha \geqslant 3)]$.

Замечание 1.9. В кратных несобственных интегралах можно также делать замену переменных, а именно справедлива следующая теорема, для простоты сформулированная для двойного интеграла.

Теорема 1.9. Пусть задано преобразование (1.31) $\Omega' \to \Omega \subseteq R^2$, если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\Omega \backslash L$ (где L — множество особых точек функции, $\mu(L) = 0$) и несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$$

сходится, то интеграл

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v),\ y(u, v))\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|dudv$$

сходится и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v),\ y(u, v))\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|dudv.$$

1.6. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ К ГЛАВЕ 1

1.1. Вычислить двукратные интегралы. Изменить порядок интегрирования.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (x^2 + 2xy)dy;$$

$$\text{б)}\ \int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_0^{y^2} (x + 2y)dx; \quad \text{в)}\ \int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}\,dy.$$

Решение.

а) Сначала вычислим внутренний интеграл, считая x постоянной величиной:

$$\int\limits_0^3 (x^2 + 2xy)dy = (x^2 y + xy^2)\Big|_{y=0}^{y=3} = 3x^2 + 9x.$$

Осуществляем подстановку этой функции во внутренний интеграл и рассчитываем его по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^2 (3x^2+9x)dx = \left(x^3+\frac{9}{2}x^2\right)\Big|_0^2 = 8+18=26.$$

Теперь изменим порядок интегрирования и проведем аналогичные вычисления:

$$\int_0^2 dx \int_0^3 (x^2+2xy)dy = \int_0^3 dy \int_0^2 (x^2+2xy)dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3}+x^2y\right)\Big|_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^3 \left(\frac{8}{3}+4y\right)dy = \left(\frac{8}{3}y+2y^2\right)\Big|_0^3 = 8+18=26.$$

б) При вычислении внутреннего интеграла величина y считается постоянной:

$$\int_{-2}^0 dy \int_0^{y^2} (x+2y)dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big|_{x=0}^{x=y^2} dy =$$

$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{y^4}{2}+2y^3\right)dy = \left(\frac{y^5}{10}+\frac{y^4}{2}\right)\Big|_{-2}^0 = \frac{32}{10}-8=-\frac{24}{5}.$$

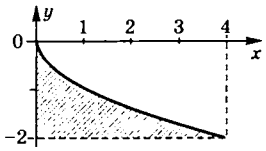

Рис. 1.17

Чтобы осуществить интегрирование в другом порядке, необходимо прежде всего правильно расставить пределы. На рис. 1.17 показана область интегрирования $\Omega = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant y^2; -2 \leqslant y \leqslant 0\}$.

Прямые параллельные оси OY пересекают область Ω в точках $y=-2$ и $y=-\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. С учетом сказанного получаем:

$$\int_0^4 dx \int_{-2}^{-\sqrt{x}} (x+2y)dy = \int_0^4 (xy+y^2)\Big|_{-2}^{-\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^4 (3x-x^{3/2}-4)dx = \left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{5/2}-4x\right)\Big|_0^4 = 24-\frac{64}{5}=-\frac{24}{5}.$$

в) Изобразим область интегрирования $\Omega = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 5; 0 \leqslant y \leqslant 5-x\}$. Эта область представлена на рис. 1.18.

В данном примере расчеты проводятся одинаково при любом порядке интегрирования:

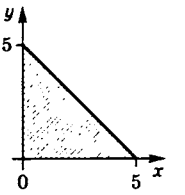

Рис. 1.18

$$\int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^5 (4+x+y)^{3/2}\Big|_0^{5-x} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^5 \left(9^{3/2} - (4+x)^{3/2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(27x - \frac{2}{5}(4+x)^{5/2}\right)\Big|_0^5 = \frac{2}{3}\left(135 - \frac{2}{5}(3^5 - 2^5)\right) = \frac{506}{3}.$$

1.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy,$$

где Ω — треугольник, образованный прямыми:

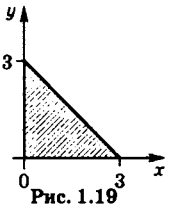

Рис. 1.19

а) $x = 0; y = 0; x + y = 3$;

б) $x = 3; y = 0; y = x$.

Решение.

а) Область интегрирования изображена на рис. 1.19.

Вычисляем двойной интеграл по Ω повторным интегрированием:

$$\iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x+y)\,dy = \int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2}\right)dx = \int_0^3 \left(\frac{9}{2} + \frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{9}{2}x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{6} = 9.$$

б) Область интегрирования Ω изображена на рис. 1.20. Проведем необходимые вычисления:

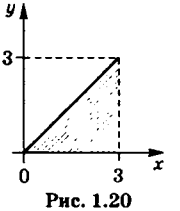

Рис. 1.20

$$\iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^3 dx \int_0^x (x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x dx = \frac{3}{2}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{2}\Big|_0^3 = \frac{27}{2}.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_y^3(x+y)dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_y^3 dy=\int\limits_0^3\left(\frac{9}{2}-\frac{y^2}{2}+3y-y^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\frac{9}{2}+3y-\frac{3}{2}y^2\right)dy=\left(\frac{9}{2}y+\frac{3}{2}y^2-\frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{2}+\frac{27}{2}-\frac{27}{2}=\frac{27}{2}.$$

1.3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, если область Ω ограничена линиями:

а) $x=2;\ y=x;\ x=2y$;

б) $2y=x^2;\ y=x$.

Р е ш е н и е.

а) В этом случае удобнее сначала интегрировать по переменной y, затем по x. Область интегрирования изображена на рис. 1.21. Проведем соответствующие вычисления:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{xdy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{x}dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)x\Bigg|_0^2=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

б) Область интегрирования представлена на рис. 1.22.

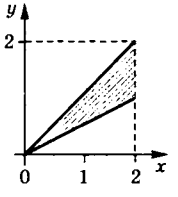

Рис. 1.21

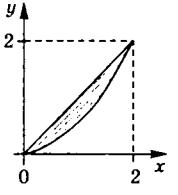

Рис. 1.22

Так, как и в предыдущем примере, сначала проинтегрируем по y, а затем по x:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{x}\frac{x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\int\limits_0^1\operatorname{arctg}t\,dt=\frac{\pi}{2}-2\left(t\operatorname{arctg}t\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{t}{1+t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1\right)=\ln 2.$$

1.4. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

а) $\iint\limits_{\Omega}x^2y\,dx\,dy;\ \ y=0;\ \ y=\sqrt{2ax-x^2};$

б) $\iint\limits_{\Omega}\sin(x+y)\,dx\,dy;\ \ y=0;\ \ y=x;\ \ x+y=\frac{\pi}{2};$

в) $\iint\limits_{\Omega}x^2(y-x)\,dx\,dy;\ \ x=y^2;\ \ y=x^2.$

Р е ш е н и е.

а) В этом примере область интегрирования Ω есть половина круга, расположенная в верхней полуплоскости $y>0$, радиус круга $r=|a|$, центр круга в точке $x=a$, $y=0$. Область Ω показана на рис. 1.23 (изображен случай $a>0$).

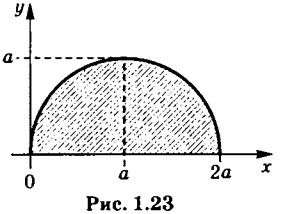

Рис. 1.23

И в этой задаче, так же как и в предыдущих, удобнее сначала интегрировать по y, а затем по x. Проведем вычисления. При $a>0$ получаем:

$$\iint\limits_{\Omega}x^2y\,dx\,dy=\int\limits_0^{2a}dx\int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}}x^2y\,dy=\int\limits_0^{2a}\left(\frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}x^2(2ax-x^2)dx=a\int\limits_0^{2a}x^3dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}x^4dx=$$

$$=a\frac{x^4}{4}\Big|_0^{2a}-\frac{1}{10}x^5\Big|_0^{2a}=4a^5-\frac{32}{10}a^5=\frac{4}{5}a^5.$$

Если $a < 0$, то пределы интегрирования по переменной x меняются местами:

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y\,dx\,dy = \int\limits_{2a}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2 y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{2a}^{0} x^2(2ax - x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2a} x^4\,dx = a\frac{x^4}{4}\Big|_{2a}^{0} - \frac{1}{10}x^5\Big|_{2a}^{0} = -\frac{4}{5}a^5.$$

Таким образом, окончательно получаем следующий результат:

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y\,dx\,dy = \frac{4}{5}|a|^5.$$

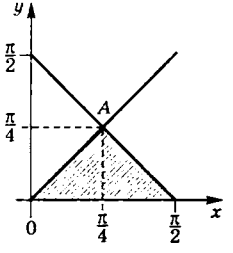

Рис. 1.24

б) Область интегрирования изображена на рис. 1.24. Здесь выгоднее внутреннее интегрирование выполнить по переменной x, а внешнее — по y. При интегрировании в обратном порядке область интегрирования необходимо разбить на две части, опуская из точки A перпендикуляр к оси OX, что приведет к расчету двух интегралов по частичным областям.

Приведем оба варианта вычислений:

$$\iint\limits_{\Omega} \sin(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_{y}^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (-\cos(x+y))\Big|_{y}^{\frac{\pi}{2}-y} dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y\,dy = \frac{1}{2}\sin 2y\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$\iint\limits_{\Omega} \sin(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{x} \sin(x+y)\,dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (-\cos(x+y))\Big|_{0}^{x} dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x+y))\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}-x} dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left(-\frac{\sin 2x}{2} - \sin x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

в) Область интегрирования Ω представлена на рис. 1.25.

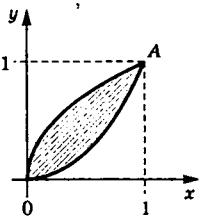

Рис. 1.25

Линии $x = y^2$, $y = x^2$ пересекаются в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$. Область Ω симметрична относительно биссектрисы $y = x$. Внутреннее интегрирование выполним по переменной y, а затем внешнее — по x:

$$\iint\limits_{\Omega} x^2(y-x)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y-x)\,dy = \int\limits_0^1 x^2 \frac{(y-x)^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2\left(\sqrt{x}-x\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(x^2-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(x - 2x^{3/2} + x^2)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{1}{3}x^6 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{504}.$$

1.5. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} (2x + 3y + 1)\,dx\,dy$$

по области Ω, ограниченной треугольником с вершинами $A(1, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(2, -4)$.

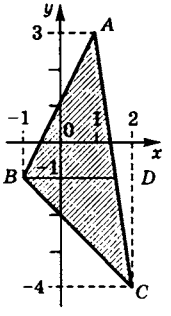

Рис. 1.26

Р е ш е н и е. Указанный треугольник изображен на рис. 1.26. Проведем отрезок BD, параллельный оси OX. Тем самым исходный треугольник ABC будет разбит на два треугольника ABD и DBC. Далее напишем уравнения прямых, содержащих стороны треугольника AB, BC и CA:

$$AB \subset l_{AB}: \quad \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{y-3}{x-1} \quad \text{или} \quad x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2};$$

$$BC \subset l_{BC}: \quad \frac{-4+1}{2+1} = \frac{y+1}{x+1} \quad \text{или} \quad x = -y - 2;$$

$$CA \subset l_{CA}: \quad \frac{3+4}{1-2} = \frac{y+4}{x-2} \quad \text{или} \quad x = -\frac{y}{7} + \frac{10}{7}.$$

Теперь можно приступить к повторному интегрированию (внутреннее интегрирование по переменной x, внешнее — по переменной y):

$$\iint\limits_{\Omega}(2x+3y+1)dxdy=\int\limits_{-4}^{1}dy\int\limits_{-y-2}^{\frac{y}{7}-\frac{10}{7}}(2x+3y+1)dx+\int\limits_{1}^{3}dy\int\limits_{\frac{y}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{y}{7}-\frac{10}{7}}(2x+3y+1)dx=$$

$$=\int\limits_{-4}^{-1}(x^2+3yx+x)\Big|_{-y-2}^{\frac{y}{7}-\frac{10}{7}}dy+\int\limits_{-1}^{3}(x^2+3yx+x)\Big|_{\frac{y}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{y}{7}-\frac{10}{7}}dy=$$

$$=\int\limits_{-4}^{-1}\left(\left(-\frac{y}{7}+\frac{10}{7}\right)^2+3y\left(-\frac{y}{7}+\frac{10}{7}\right)+\frac{10}{7}-\frac{y}{7}\right)dy+$$

$$+\int\limits_{-1}^{3}\left(\left(-\frac{y}{7}+\frac{10}{7}\right)^2+3y\left(-\frac{y}{7}+\frac{10}{7}\right)+\frac{10}{7}-\frac{y}{7}\right)dy-\int\limits_{-4}^{-1}((y+2)^2-3y(y+2)-y-2)dy-$$

$$-\int\limits_{-1}^{3}\left(\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+3y\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\right)dy=\int\limits_{-4}^{3}\left(-\frac{20}{49}y^2+\frac{183}{49}y+\frac{170}{49}\right)dy-$$

$$-\int\limits_{-4}^{-1}(-2y^2-3y+2)dy-\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{7}{4}y^2-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\right)dy=\left(-\frac{20}{147}y^3-\frac{183}{98}y^2+\frac{170}{49}y\right)\Big|_{-4}^{3}-$$

$$-\left(-\frac{2}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\right)\Big|_{-4}^{-1}-\left(\frac{7}{12}y^3-\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{4}y\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{8065}{249}-\frac{37}{12}-\frac{28}{3}=-\frac{83}{294}.$$

1.6. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

а) $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{2-x^2}f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{1/y}^{y}f(x,y)dx$;

г) $\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{y^2}^{4}f(x,y)dx$;

д) $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{2}f(x,y)dy$.

Р е ш е н и е.

а) Прежде всего необходимо правильно изобразить область интегрирования Ω. Для этого построим графики двух функций: $y=x+1$, $y=\sqrt{1-x^2}$ при $x\in[-1,0]$. Результаты представлены на рис. 1.27.

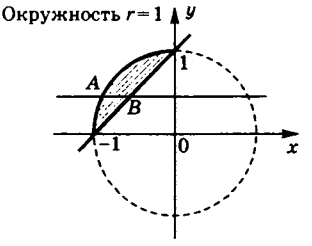

Рис. 1.27
Окружность $r = 1$

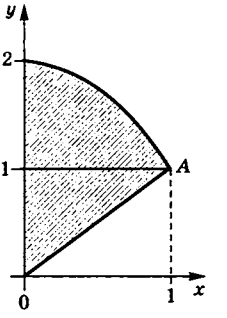

Рис. 1.28

Из этого рисунка видно, что прямые $y = c (0 < c < 1)$ пересекают область Ω в двух точках: $A\left(-\sqrt{1-y^2}, y\right), B(y-1, y)$, $y \in [0, 1]$. Следовательно, переменная x изменяется от $-\sqrt{1-y^2}$ до $y - 1$, а переменная y — от 0 до 1. Отсюда получаем:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x, y)dx.$$

б) Строим графики функций $y = x$, $y = 2 - x^2$ при $y \in [0, 1]$. Область Ω изображена на рис. 1.28.

Опускаем из точки A перпендикуляр на ось OY, тем самым разбиваем Ω на две подобласти $\Omega_1 = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant y; y \in (0, 1)\}$ и $\Omega_2 = \left\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2-y}; y \in (1, 2)\right\}$. Используем свойство аддитивности двойного интеграла и получаем:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} f(x, y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x, y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x, y)dx.$$

в) Так же, как и в предыдущих примерах, изображаем в плоскости XOY графики функций $x = \dfrac{1}{y}$, $x = y$, $y \in (1, 2)$ (в данном случае независимой переменной является y). На рис. 1.29 область Ω заштрихована.

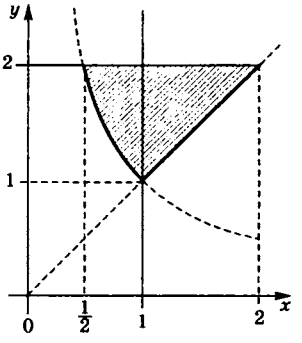

Рис. 1.29

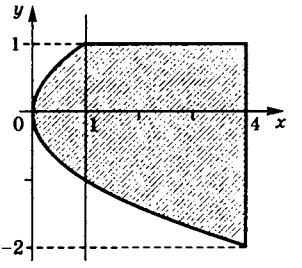

Рис. 1.30

Прямая $x = 1$ разделяет область Ω на две простые подобласти $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \left\{(x, y):\ \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant 2;\ \ x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\} \text{ и}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y):\ \ x \leqslant y \leqslant 2;\ \ x \in (1, 2)\}.$$

В соответствии с этим получаем окончательный результат (здесь также используется аддитивность кратного интеграла):

$$\int_1^2 dy \int_{1/y}^{y} f(x, y)dx = \int_{1/2}^{1} dx \int_{1/x}^{2} f(x, y)dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y)dy.$$

г) Область Ω ограничена линиями $x = y^2$, $x = 4$, $y = -2$, $y = 1$. Область Ω показана на рис. 1.30. В этом примере прямая $x = 1$ разбивает Ω на Ω_1 и Ω_2, где

$$\Omega_1 = \left\{(x, y):\ \ x \in (0, 1);\ \ -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\} \text{ и}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y):\ \ x \in (1, 4);\ \ -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

Применяем свойство аддитивности двойного интеграла и получаем:

$$\int_2^1 dy \int_{y^2}^{4} f(x, y)dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{1} f(x, y)dy.$$

д) Область интегрирования ограничена линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 2$ (рис. 1.31). Область Ω показана на рис. 1.31.

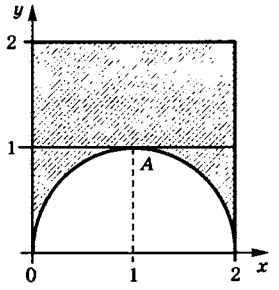

Рис. 1.31

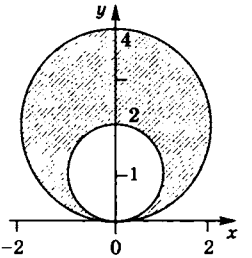

Рис. 1.32

Прямая $y = 1$ (она касается полуокружности $y = \sqrt{2x - x^2}$ в точке $A(1, 1)$) разбивает Ω на подобласти $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$:

$$\Omega_1 = \left\{(x, y):\ 0 \leqslant x \leqslant 1 - \sqrt{1 - y^2};\ y \in (0, 1)\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y):\ 1 + \sqrt{1 - y^2} \leqslant x \leqslant 2;\ y \in (0, 1)\right\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y):\ x \in [0, 2];\ y \in [1, 2]\}.$$

В соответствии с этим разбиением получаем:

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x - x^2}}^2 f(x, y)dy =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\int_0^{1 - \sqrt{1 - y^2}} f(x, y)dx + \int_{1 + \sqrt{1 - y^2}}^0 f(x, y)dx \right) + \int_1^2 dy \int_0^2 f(x, y)dx.$$

1.7. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойные интегралы.

а) $\iint\limits_\Omega xy^2 dxdy$, где область Ω ограничена окружностями $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4y$;

б) $\iint\limits_\Omega e^{-x^2 - y^2} dxdy$, где Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Р е ш е н и е.

а) Прежде всего изобразим область Ω в декартовой системе координат (рис. 1.32).

Уравнения граничных окружностей в полярных координатах получим после замены $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \rho = 2\sin\varphi,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;$$
$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow \rho = 4\sin\varphi,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Область Ω в координатах x, y преобразуется в область D в координатах φ, ρ: $D = \{(\varphi, \rho): 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ 2\sin\varphi \leqslant \rho \leqslant 4\sin\varphi\}$. Проведем преобразование к координатам φ, ρ и вычислим исходный двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 dxdy = \iint\limits_{D} \rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho^4 d\rho = \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos\varphi \left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{992}{5} \int\limits_0^{\pi} \sin^7\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{992}{5} \int\limits_0^{\pi} \sin^7\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{992}{5} \frac{\sin^8\varphi}{8}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

б) Преобразуем интеграл к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint\limits_{D} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right)\Big|_0^{R} d\varphi = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

1.8. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями в декартовой системе координат:

а) $3x^2 = 25y$; $5y^2 = 9x$;

б) $xy = 4$; $x + y = 5$;

в) $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $x = 1$;

г) $x + y = 1$; $x + 3y = 1$; $x = y$; $x + 2y = 2$.

Р е ш е н и е. Для вычисления площадей указанных фигур Ω будем использовать формулу (1.76)

$$\mu(\Omega) = S_{\Omega} = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

а) Прежде всего решим совместно уравнения $3x^2 = 25y$, $5y^2 = 9x$. Перемножая их, получаем

$$(xy)^2 = 15xy.$$

Следовательно, либо $xy = 0$, либо $xy = 15$. В первом случае получаем точку $O(0, 0)$, во втором — точку $x = 5$, $y = 3$.

Рассчитаем площадь, применяя повторное интегрирование:

$$S_\Omega = \iint\limits_\Omega dxdy = \int\limits_0^5 dx \int\limits_{\frac{3}{25}x}^{3\sqrt{\frac{x}{5}}} dy =$$

$$= \int\limits_0^5 \left(\frac{3}{\sqrt{5}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{25} x^2 \right) dx = \frac{2}{\sqrt{5}} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 - \frac{x^3}{25} \Big|_0^5 = 7.$$

б) И в этом случае решаем совместно уравнения $xy = 4$, $x + y = 5$, чтобы определить проекции фигуры Ω на оси координат. При этом получаем две точки: $x = 1$; $y = 4$ и $x = 4$, $y = 1$. Теперь рассчитаем площадь, используя повторное интегрирование:

$$S_\Omega = \iint\limits_\Omega dxdy = \int\limits_1^4 dy \int\limits_{\frac{4}{y}}^{5-y} dx = \int\limits_1^4 \left(5 - y - \frac{4}{y} \right) dy = \left(5 - \frac{y^2}{2} - 4\ln y \right) \Big|_1^4 =$$

$$= 20 - 8 - 8\ln 2 - 5 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} - 8\ln 2.$$

в) В данном случае фигура Ω проектируется на ось OX в отрезок $[0, 1]$, поэтому

$$S_\Omega = \iint\limits_\Omega dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^x}^{e^{2x}} dy = \int\limits_0^1 (e^{2x} - e^x) dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2 - 2e + 1}{2} = \frac{(e-1)^2}{2}.$$

г) Изобразим фигуру Ω, площадь которой необходимо определить (см. рис. 1.33).

Через точки C и D проведем прямые, параллельные оси OX. Ордината точки C: $y = \frac{1}{4}$, ордината точки A: $y = \frac{1}{2}$,

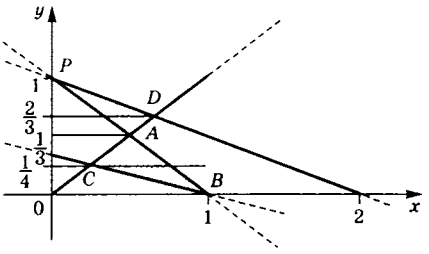

Рис. 1.33

ордината точки D: $y = \frac{2}{3}$. Область Ω состоит из двух треугольников ABC и ADP, проектируем их на ось OY и применяем повторное интегрирование:

$$S_\Omega = \iint\limits_\Omega dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dy \int\limits_{1-3y}^{1} dx + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{y}^{1-y} dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} dy \int\limits_{1-y}^{y} dx + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{2-2} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{4}} 2ydy + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (1-2y)dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (2y-1)dy + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} (1-y)dy =$$

$$= y^2\Big|_0^{\frac{1}{4}} + (y-y^2)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + (y^2-y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} + \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{11}{12}.$$

1.9. Найти площади фигур, ограниченных линиями в полярных координатах:

а) $\rho = \cos 2\varphi$;

б) $\rho = 4\sin\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$;

в) $\rho = \sin 3\varphi$.

Р е ш е н и е. При вычислении площадей фигур, ограниченных линиями в полярных координатах, используют формулу

$$S_\Omega = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi,$$

где D — область изменения переменных ρ и φ.

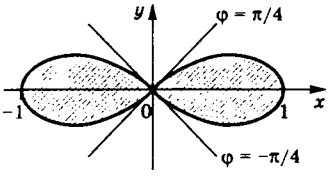

Рис. 1.34

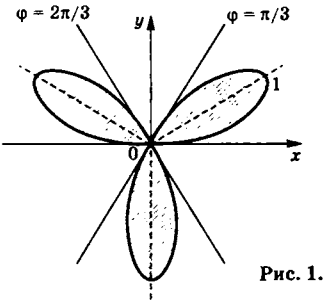

Рис. 1.35

а) На плоскости XOY кривая $\rho = \cos 2\varphi$ (двулистник) изображена на рис. 1.34. В силу симметрии Ω найдем площадь одного лепестка и удвоим результат, при этом

$$D = \left\{(\varphi, \rho):\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos 2\varphi\right\}.$$

$$S_\Omega = 2\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\cos 2\varphi} \rho d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 2\varphi) d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4\varphi + 1}{2} d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\sin 4\varphi}{8} + \frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

б) Область изменения переменных ρ, φ в этом случае есть $D = \{(\varphi, \rho): 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ 2\sin\varphi \leqslant \rho \leqslant 4\sin\varphi\}$, поэтому

$$S_\Omega = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} 12\sin^2\varphi d\varphi = 3\int\limits_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 3\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 3\pi.$$

в) В плоскости OXY фигура Ω представляет собой трилистник (рис. 1.35), при этом

$$D = \left\{(\varphi, \rho):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3};\ 0 \leqslant \rho \leqslant \sin 3\varphi\right\}:$$

$$S_\Omega = 3\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\sin 3\varphi} \rho d\rho = \frac{3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi d\varphi = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi =$$

$$= 3\left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi.$$

1.10. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

а) $(x^2+y^2)^2 = 2y^2$;

б) $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$.

Р е ш е н и е.

а) Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, получим уравнение линии, ограничивающей Ω в полярных координатах:

$$\rho^4 = 2\rho^2\sin^2\varphi;$$

$$\rho^2 = 2\sin^2\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{2\sin^2\varphi} = \sqrt{2}\,|\sin\varphi|.$$

Эта фигура Ω — двулистник. Находим площадь одного листа и удваиваем ее, при этом

$$D = \left\{(\varphi,\rho):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}\sin\varphi\right\}.$$

$$S_\Omega = 2\iint_D \rho d\rho d\varphi = 2\int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi} \rho d\rho = 2\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \int_0^\pi (1-\cos 2\varphi)d\varphi = \pi.$$

б) Проще всего, как и в примере а), перейти к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, получаем:

$$\rho^2 = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi.$$

Область изменения переменных ρ, φ:

$$D = \left\{(\varphi,\rho):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi}\right\}.$$

Находим площадь Ω в полярных координатах:

$$S_\Omega = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi}} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \pi - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

1.11. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $z=0$, $x+y+z=2$;

б) плоскостями $x+y+z=2$, $3x+y=2$, $3x+2y=4$, $z=0$, $y=0$;

в) эллиптическим параболоидом $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ и плоскостями $x=-1, x=1, y=-1, y=1$;

г) сферой $x^2+y^2+z^2=2R^2$, цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостью $z=0$;

д) конусом $x^2+y^2=z^2$, цилиндром $x^2+y^2=2y$ и плоскостью $z=0$.

Р е ш е н и е. Если тело $\Omega \in R_3$ ограничено сверху поверхностью $z=f(x, y) \geqslant 0, (x, y) \in \Omega_{XOY} \subset R_2$, снизу — плоскостью $z=0$, а сбоку — цилиндрической поверхностью $\varphi(x, y)=0$, где $\varphi(x, y)$ — уравнение линии, являющейся границей области Ω_{XOY}, тогда объем V_Ω этого тела можно рассчитать по формуле (см. также пункт 1.77):

$$\mu(\Omega)=V_\Omega=\iint\limits_{\Omega_{XOY}} f(x, y)dxdy.$$

а) В этом случае $\Omega_{XOY}=\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 1\}$, поэтому

$$V_\Omega=\iint\limits_{\Omega_{XOY}} (2-x-y)dxdy.$$

Для вычисления этого интеграла перейдем к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi; y=\rho\sin\varphi$:

$$\iint\limits_{\Omega_{XOY}} (2-x-y)dxdy=\iint\limits_{\Omega_{XOY}} (2-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi))\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi))\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{\rho^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)d\varphi=\left(\varphi-\frac{1}{3}(\sin\varphi-\cos\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi.$$

б) На плоскости XOY изобразим область Ω_{XOY} — проекцию тела $\Omega \in R_3$ на эту плоскость (рис. 1.36).

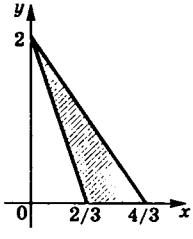

Рис. 1.36

Проводим необходимые расчеты:

$$V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} (2-x-y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{1}{3}(4-2y)} (2-x-y)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x - \frac{x^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{1}{3}(4-2y)} dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}((4-2y)^2 - (2-y)^2) - \frac{y}{3}(2-y)\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}y + \frac{y^2}{3} - \frac{1}{18}(2-y)(6-3y)\right)dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y + \frac{y^2}{6}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{2}{3}y - \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{18}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

в) В данном случае $\Omega_{XOY} = \{(x, y): |x| \leqslant 1; |y| \leqslant 1\}$ — квадрат со стороной 2 на плоскости XOY, поэтому

$$V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \int\limits_{-1}^{+1} dx \int\limits_{-1}^{+1} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \left(\frac{x^2 y}{a^2} + \frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} dx = \int\limits_{-1}^{+1} \left(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2}{3b^2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3a^2} + \frac{2x}{3b^2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{3b^2} = \frac{4}{3}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

г) В этом примере необходимо рассчитать следующий интеграл:

$$V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

где Ω_{XOY} — круг радиуса R на плоскости XOY.

Введем полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда получаем

$$V_\Omega = \iint\limits_D \sqrt{2R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{2R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)(2R^2 - \rho^2)\Big|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right).$$

д) Проекция этого тела $\Omega \in R_3$ на плоскость XOY есть круг $\Omega_{XOY} = \{(x, y): x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}$. Рассчитаем объем тела $\Omega \subset R_3$:

$$V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

И в этом случае удобно перейти к полярным координатам. Прежде всего преобразуем к ним уравнения окружности $x^2 + y^2 = 2y$. После подстановки $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ найдем $\rho = 2\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, поэтому

$$V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}\int\limits_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi = -\frac{8}{3}\int\limits_0^\pi (1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)dt = \frac{8}{3}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

1.12. Найти массу круглой пластинки, если ее поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния от центра.

Р е ш е н и е. Обозначим поверхностную плотность пластинки (масса единицы площади) p, тогда по условию

$$p = kr^2,$$

где k — коэффициент пропорциональности; ρ — расстояние от центра пластинки.

Массу плоской фигуры Ω с заданной поверхностной плотностью $p = p(x, y)$ вычисляют по формуле:

$M(\Omega) = \iint\limits_\Omega p(x, y)dxdy$ — декартова система координат;

$M(\Omega) = \iint\limits_D p(\rho, \varphi)\rho d\rho d\varphi$ — полярная система координат.

В этой задаче удобно использовать полярную систему координат, тогда

$$D = \{(\varphi, \rho):\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, R]\};$$

$$M(\Omega) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R k\rho^3 d\rho = \frac{\pi k R^4}{2}.$$

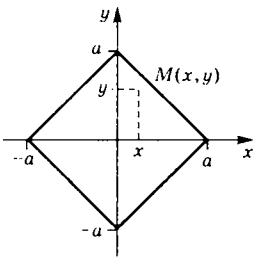

Рис. 1.37

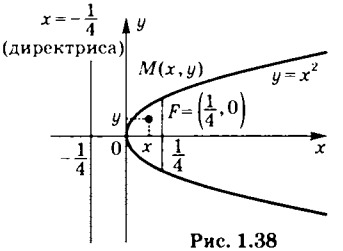

Рис. 1.38

1.13. Найти массу квадратной пластины, плотность которой в каждой точке M пропорциональна сумме расстояний от этой точки до диагоналей пластины.

Р е ш е н и е. Пластина в выбранной декартовой системе координат изображена на рис. 1.37.

По условию $p(x, y) = K(x + y)$, поэтому

$$M(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} K(x+y)dxdy = 4K\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} (x+y)dy =$$

$$= 4K\int\limits_0^a \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{a-x} dx = 4K\int\limits_0^a \left(x(a-x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 \right)dx =$$

$$= 4K\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}(a-x)^3 \right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}Ka^3.$$

1.14. Пластина ограничена параболой $y^2 = x$ и ее хордой, проходящей через фокус перпендикулярно к оси параболы. Найти массу пластины, если в каждой точке поверхностная плотность обратно пропорциональна расстоянию от точки до директрисы параболы.

Р е ш е н и е. Пластина изображена на рис. 1.38 с указанием фокуса и директрисы (подробнее см. часть I, глава 3).

По условию задачи $p(x, y) = \dfrac{K}{\left(x + \dfrac{1}{4}\right)}$, следовательно

$$M(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} p(x,y)dxdy = K\int\limits_0^{1/4} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{x+\frac{1}{4}} = 2K\int\limits_0^{1/4} \frac{\sqrt{x}dx}{x+\frac{1}{4}}.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену $\sqrt{x} = t$, тогда

$$M(\Omega) = 2K\int_0^{1/4}\frac{\sqrt{x}dx}{x+\frac{1}{4}} = 4K\int_0^{1/2}\frac{t^2dt}{t^2+\frac{1}{4}} = 4K\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= 2K\left(1 - \operatorname{arctg} 2t\Big|_0^{1/2}\right) = 2K\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

1.15. Рассчитать моменты инерции однородных плоских фигур:

а) прямоугольника со сторонами a и b относительно одной из его вершин и относительно точки пересечения его диагоналей;

б) круга радиуса R относительно касательной и относительно точки на окружности.

Р е ш е н и е.

а) Пусть O — точка, относительно которой рассчитывается момент инерции плоской фигуры (как правило, в эту точку помещают начало декартовой системы координат), а $M(x, y)$ — произвольная точка пластины, тогда по определению момент инерции относительно точки O выражается интегралом

$$I_0(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} OM^2 p dx dy,$$

где $p = \text{const}$ — плотность пластины.

Если O совпадает с одной из вершин прямоугольной пластины, получаем

$$I_0(\Omega) = p\int_0^a dx\int_0^b (x^2+y^2)dy = p\int_0^a\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^b dx =$$

$$= p\int_0^a\left(bx^2 + \frac{b^3}{3}\right)dx = p\left(\frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3}\right) = \frac{pab}{3}(a^2+b^2).$$

Если O — точка пересечения диагоналей прямоугольной пластины, получим (начало декартовой системы координат помещено в точке O):

$$I_0(\Omega) = p\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2+y^2)dy = p\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx =$$

$$= p\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 b + \frac{b^3}{3} \right) dx = \frac{pab}{12}(a^2+b^2).$$

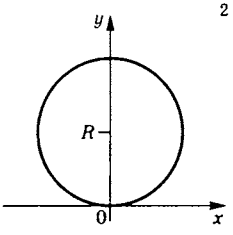

Рис. 1.39

Момент инерции уменьшился в 4 раза по сравнению с предыдущим случаем.

б) Рассчитаем момент инерции круга относительно оси OX (рис. 1.39).

В данном случае $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 2Ry\}$. Для расчетов удобно ввести полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, при этом область изменения переменных ρ, φ $D = \{(\varphi, \rho): \varphi \in [0, \pi], 0 \leqslant \rho \leqslant 2R\sin\varphi\}$. Момент инерции относительно оси OX рассчитывается по формуле

$$I_{OX}(\Omega) = p\iint\limits_{\Omega} y^2 dxdy = p\iint\limits_{D} \rho^3 \sin^2\varphi d\rho d\varphi =$$

$$= p\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2R\sin\varphi} \rho^3 \sin^2\varphi d\rho = 4pR^4 \int\limits_0^{\pi} \sin^6\varphi d\varphi.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся некоторым искусственным приемом. Возведем в куб основное тригонометрическое тождество $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, получим

$$1 = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^3 = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi + 3\sin^4\varphi\cos^2\varphi +$$

$$+ 3\sin^2\varphi\cos^4\varphi = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi + \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi.$$

Теперь интегрируем это тождество в пределах от 0 до π:

$$\int\limits_0^{\pi} d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin^6\varphi d\varphi + \int\limits_0^{\pi} \cos^6\varphi d\varphi + \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi.$$

Заметим также, что $\int\limits_0^{\pi} \sin^6\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \cos^6\varphi d\varphi$.

Чтобы убедиться в этом, проделаем несложные преобразования:

$$\int_0^{\pi}\cos^6\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^6\varphi d\varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^6\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi -$$

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi = \int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi.$$

Следовательно,

$$\pi = 2\int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi + \frac{3}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi.$$

Отсюда окончательно получаем $\int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi = \frac{5\pi}{16}$.

Таким образом, момент инерции круглой однородной пластины относительно оси OX равен

$$I_{OX}(\Omega) = \frac{5\pi}{4}pR^4.$$

Теперь рассчитаем момент инерции этой пластины относительно точки O:

$$I_O(\Omega) = p\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy =$$

$$= p\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2R\sin\varphi}\rho^3 d\rho = 4R^4 p\int_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi = \frac{3}{2}\pi R^4 p.$$

Для вычисления последнего интеграла можно применить прием, аналогичный тому, который использовался при вычислении интеграла $\int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi$, только в этом случае нужно тригонометрическое тождество возводить в квадрат.

1.16. Найти центр тяжести пластины, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, если поверхностная плотность $P = xy$.

Р е ш е н и е. Координаты центра тяжести плоской фигуры x_C, y_C определяются по формулам:

$$x_C = \frac{m_y}{M}, \quad y_C = \frac{m_x}{M},$$

где $m_y = \iint\limits_{\Omega} px\,dx\,dy$ — статический момент пластины относительно оси OY; $m_x = \iint\limits_{\Omega} py\,dx\,dy$ — статический момент пластины относительно оси OX; $M = \iint\limits_{\Omega} p\,dx\,dy$ — масса пластины.

В этой задаче

$$\Omega = \left\{(x, y):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ \ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0\right\}.$$

Проведем необходимые расчеты:

$$M = \iint\limits_{\Omega} p\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy = \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy =$$

$$= \frac{b^2}{2}\int\limits_0^a x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{b^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2b^2}{8};$$

$$m_y = \iint\limits_{\Omega} px\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy =$$

$$= \frac{b^2}{2}\int\limits_0^a x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{b^2}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3b^2}{15};$$

$$m_x = \iint\limits_{\Omega} py\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^b y^2\,dy \int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}} x\,dx =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^b y^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{a^2}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5b^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2b^3}{15}.$$

Отсюда определяем искомые координаты центра тяжести пластины:

$$x_C = \frac{m_y}{M} = \frac{8}{15}a; \quad y_C = \frac{m_x}{M} = \frac{8}{15}b.$$

1.17. Найти центры тяжести однородных тел:

а) полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$;

б) тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + 2y + z = 1$, $x = y = z = 0$.

Р е ш е н и е.

а) Для однородного тела $\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in \Omega_{XOY}; 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}$ координаты центра тяжести рассчитываются по формулам, которые получаются из (1.85) при $P(x, y, z) = 1$:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Omega_{XOY}} xf(x, y)dxdy}{V_\Omega};$$

$$y_C = \frac{\iint\limits_{\Omega_{XOY}} yf(x, y)dxdy}{V_\Omega};$$

$$z_C = \frac{\iint\limits_{\Omega_{XOY}} f^2(x, y)dxdy}{2V_\Omega},$$

где $V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} f(x, y)dxdy$ — объем однородного тела.

Из соображений симметрии для полушара $x_C = y_C = 0$. Поэтому осталось рассчитать координаты z_C. Прежде всего, как следует из симметрии,

$$V_\Omega = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Поэтому

$$z_C = \frac{3}{2\pi R^3} \iint\limits_{\Omega_{XOY}} (R^2 - x^2 - y^2)dxdy = \frac{3}{2\pi R^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\rho d\rho =$$

$$= \frac{3}{R^3} \int\limits_0^b y^2 \left(R^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_0^R = \frac{3}{4} R.$$

б) В случае указанного в задаче тетраэдра $\Omega_{XOY} = \{(x, y): x \geqslant 0, y \geqslant 0, 0 \leqslant x + 2y \leqslant 1\}$. Теперь можно провести расчеты координат центра тяжести однородного тетраэдра:

$$V_\Omega = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} (1-x-2y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{1-2y} (1-x-2y)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{2} - 2yx \right)\Big|_0^{1-2y} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 2y - \frac{(1-2y)^2}{2} - 2y(1-2y) \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2y + 2y^2 \right) dy = \left(\frac{1}{2}y - y^2 + \frac{2}{3}y^3 \right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3\cdot 8} = \frac{1}{12};$$

$$x_c = 12 \iint\limits_{\Omega_{XOY}} x(1-x-2y)dxdy = 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{1-2y} (x - x^2 - 2yx)dx =$$

$$= 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - yx^2 \right)\Big|_0^{1-2y} dy = 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-2y)^2}{2} - \frac{(1-2y)^3}{3} - y(1-2y)^2 \right) dy =$$

$$= 12 \left(-\frac{(1-2y)^3}{12} + \frac{(1-2y)^4}{24} - \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}y^3 - y^4 \right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 12 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{4};$$

$$y_c = 12 \iint\limits_{\Omega_{XOY}} y(1-x-2y)dxdy = 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{1-2y} y(1-x-2y)dx =$$

$$= 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(yx - \frac{yx^2}{2} - 2y^2x \right)\Big|_0^{1-2y} dy = 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(y(1-2y) - \frac{1}{2}y(1-2y)^2 - 2y^2(1-2y) \right) dy =$$

$$= 12 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^2}{2} - 2y^2 + 2y^3 \right) dy = 12 \left(\frac{y^2}{4} - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^4}{2} \right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 12 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{12} + \frac{1}{32} \right) = \frac{1}{8};$$

$$z_c = 6 \iint\limits_{\Omega_{XOY}} (1-x-2y)^2 dxdy = 6 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{1-2y} (1-x-2y)^2 dx =$$

$$= 6 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1-x-2y)^3}{3}\Big|_0^{1-2y} dy = 6 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)^3 dy = -\frac{3}{4}(1-2y)^4\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

1.18. Вычислить площади поверхностей:

а) цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, заключенного между плоскостями $z = 0$ $(z \geqslant 0)$, $z - y = 0$;

б) цилиндра $y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, заключенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$;

в) параболоида $x^2 + y^2 = 6z$, заключенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 27$;

г) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, заключенной внутри параболоида $x^2 + y^2 = 2az$, $a > 0$.

Р е ш е н и е. Если $z = f(x, y)$; $(x, y) \in \Omega_{XOY} \subset R_2$ — кусочно-гладкая поверхность, то ее площадь рассчитывается по формуле (1.83)

$$\mu(S) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy.$$

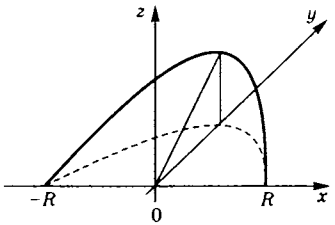

Рис. 1.40

В общем случае, когда поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, необходимо прежде всего выяснить на какую из трех координатных плоскостей она проектируется однозначно и затем перейти к явному уравнению этой поверхности. Более детально этот процесс описан далее при решении поставленных задач.

а) Поверхность показана на рис. 1.40.

В данном случае цилиндрическая поверхность, заданная неявно $x^2 + y^2 = R^2$, однозначно проектируется на плоскость XOZ и ее проекция $\Omega_{ZOX} = \{(x, z): x^2 + z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0\}$. Явное уравнение этой поверхности имеет вид $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Рассчитаем ее площадь:

$$\mu(S) = \iint\limits_{\Omega_{ZOX}} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dxdz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{ZOX}} \frac{Rdxdz}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dz}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2R^2.$$

б) Цилиндр $y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geqslant 0)$, пересеченный цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, однозначно проектируется на круг Ω_{XOY}: $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ на плоскости XOY. Поэтому площадь этой поверхности равна

$$\mu(S) = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - y^2}} =$$

$$= R \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - y^2}} = 4R^2.$$

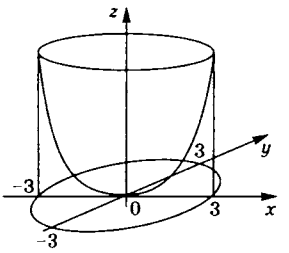

Рис. 1.41

в) Поверхность показана на рис. 1.41.

Прежде всего определим проекцию параболоида вращения $6z = x^2 + y^2$, пересеченного цилиндром $x^2 + y^2 = 27$, на плоскость XOY. Очевидно, что это круг Ω_{XOY}: $x^2 + y^2 \leqslant 27$, при этом

$$0 \leqslant z \leqslant \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Рассчитываем площадь

$$\mu(S) = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}}\,dxdy.$$

Вводим полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$;

$D = \left\{(\varphi, \rho):\ \varphi \in [0, 2\pi],\ 0 \leqslant \rho \leqslant 3\sqrt{3}\right\}$.

$$\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{9}}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{9}}\,\rho d\rho = 2\pi \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{\rho^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{3\sqrt{3}} = 42\pi.$$

г) Чтобы найти проекцию заданной поверхности на плоскость XOY, подставим $x^2 + y^2 = 2az$ в уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. Получим квадратичное уравнение относительно z:

$$z^2 + 2az - 3a^2 = 0.$$

Отсюда определяем $z = a$ ($a \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ по условию). Следовательно, сфера проектируется на круг Ω_{XOY}: $x^2 + y^2 \leqslant 2a^2$. Определяем площадь

$$\mu(S) = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \frac{\sqrt{3}a\,dxdy}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Вводим полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$;

$D = \left\{(\varphi, \rho):\ \varphi \in [0, 2\pi],\ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}a\right\}$. Получаем

$$\mu(S)=\sqrt{3}a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}=2\sqrt{3}a\pi\left(-\sqrt{3a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}a}=$$

$$=2\sqrt{3}a\pi\left(\sqrt{3a^2}-a\right)=2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\pi a^2.$$

1.19. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2ax$, вырезаемой цилиндром $z^2=2a(2a-x)$.

Р е ш е н и е. Как известно (см. формулу (1.83)), площадь части поверхности $z=f(x,y)$ (проекция на плоскость XOY есть Ω_{XOY}) вычисляется по формуле

$$\mu(S)=\iint\limits_{\Omega_{XOY}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

В нашем случае уравнение поверхности $y=\pm\sqrt{2ax-x^2}$. В силу симметрии можно ограничиться уравнением $y=\sqrt{2ax-x^2}$ и в расчетах удвоить результат. Эта поверхность проектируется на область Ω_{XOZ} плоскости XOZ, где

$$\Omega_{XOZ}=\left\{(x,z):\ |z|\leqslant 2a,\ \ a>0,\ \ 0\leqslant x\leqslant 2a-\frac{z^2}{2a}\right\}.$$

Искомая площадь равна

$$\mu(S)=2\iint\limits_{\Omega_{XOZ}}\sqrt{1+y_x^2}\,dxdz=2\int_0^{2a}\sqrt{1+y_x^2}\,dx\int_{-\sqrt{2a(2a-x)}}^{\sqrt{2a(2a-x)}}dz=$$

$$=2\int_0^{2a}\sqrt{1+\left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)^2}\,2\sqrt{2a(2a-x)}dx=$$

$$=4\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2+a^2-2ax+x^2}\sqrt{\frac{2a(2a-x)}{x(2a-x)}}dx=$$

$$=4a\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2a}{x}}dx=4a\sqrt{2a}\,2\sqrt{x}\Big|_0^{2a}=16a^2.$$

1.20. Найти площадь части поверхности параболоида $z=x^2-y^2$, заключенной между параболоидами $z=3x^2+y^2-2$ и $z=3x^2+y^2-4$.

Р е ш е н и е. Для вычисления площади также используем формулу (1.83)

$$\mu(S)=\iint\limits_{\Omega_{XOY}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy,$$

где Ω_{XOY} — проекция части гиперболического параболоида на плоскость XOY, определяемая из условий:

$$x^2 - y^2 = 3x^2 + y^2 - 4,$$
$$x^2 - y^2 = 3x^2 + y^2 - 2.$$

Таким образом, получаем $\Omega_{XOY} = \{(x, y): 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

$$\mu(S) = \iint\limits_{\Omega_{XOY}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$:

$$\mu(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi,$$

где

$$D = \left\{(\rho, \varphi): \ \rho \in \left[1, \sqrt{2}\right]; \ \varphi \in [0, 2\pi]\right\};$$

$$\mu(S) = 2\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\,r dr = \frac{\pi}{6}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right).$$

1.21. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{|x^2 - y^2|}\,dxdy$, где $\Omega = \{(x, z): |x| + |y| \leqslant a\}$.

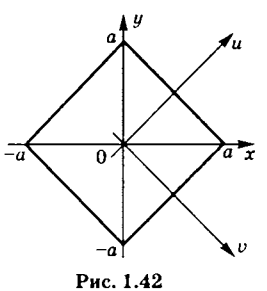

Рис. 1.42

Решение. Для вычисления этого интеграла удобно ввести новые координаты $u = x + y$, $v = x - y$. Это преобразование осуществляет взаимнооднозначное соответствие квадрата Ω: $|x| + |y| \leqslant a$ на плоскости XOY в квадрат D: $|u| \leqslant a$, $|v| \leqslant a$ на плоскости UOV с тем же началом координат O. Оси координат этих систем повернуты на $\frac{\pi}{4}$ относительно друг друга (рис. 1.42). Якобиан этого преобразования $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$ равен

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Отрицательное значение якобиана J означает, что система XOY и UOV имеют разную ориентацию: система XOY — правая, система UOV — левая. Согласно (1.36) двойной интеграл при замене координат будет преобразован

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{|x^2-y^2|}dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{|uv|}\cdot|J|\cdot dudv=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{+a}\sqrt{|u|}du\int\limits_{-a}^{+a}\sqrt{|v|}dv=$$

$$=2\int\limits_{0}^{a}\sqrt{u}du\int\limits_{0}^{a}\sqrt{v}dv=2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot a^3=\frac{8}{9}a^3.$$

1.22. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega}\frac{2y}{x}e^{-\frac{(x^2+1)y}{x}}dxdy$, где область Ω ограничена линиями

$$xy=a>0,\ xy=b>0(a<b),\ y=\frac{x}{k},\ y=kx,\ k>1.$$

Р е ш е н и е. Введем новые криволинейные координаты u, v по формулам

$$u=xy;\quad v=\frac{y}{x}.$$

Тогда область Ω на плоскости XOY преобразуется в квадрат $D=\left\{(u,v):\ a\leqslant u\leqslant b,\ \frac{1}{k}\leqslant v\leqslant k\right\}$ на плоскости u, v. Рассчитаем якобиан этого преобразования $x=\sqrt{\frac{u}{v}},\ y=\sqrt{uv}$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2v}.$$

Согласно (1.36) исходный двойной интеграл преобразуется следующим образом:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{2y}{x}e^{-\frac{(x^2+1)y}{x}}dxdy=\iint\limits_{D}e^{-(u+y)}dudv=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}e^{-u}du\int\limits_{\frac{1}{k}}^{k}e^{-v}dv=(e^{-a}-e^{-b})(e^{-1/k}-e^{-k}).$$

Если $k\to\infty$, $a\to 0$, получим значение интеграла по неограниченной области $0\leqslant xy\leqslant b$, $y\geqslant 0$:

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ k\to\infty}}(e^{-a}-e^{-b})(e^{-1/k}-e^{-k})=1-e^{-b}.$$

1.23. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_{\Omega}(2x+3y+z)dxdydz$, где $\Omega=\{(x, y, z): x \geqslant 0; y \geqslant 0;$ $0 \leqslant z \leqslant 3; x+y \leqslant 3\}$;

б) $\iiint\limits_{\Omega}(1-x)^3\sqrt{1-y^2}dxdydz$, где $\Omega=\{(x, y, z): |x| \leqslant 1; |y| \leqslant 1;$ $|z| \leqslant 3\}$;

в) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz$, где $\Omega=\{(x, y, z): z^2 \leqslant x^2+y^2; x \geqslant 0; y \geqslant 0;$ $0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Р е ш е н и е.

а) Сведем вычисление этого интеграла к трехкратному повторному интегрированию:

$$\iiint\limits_{\Omega}(2x+3y+z)dxdydz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}dy\int\limits_0^3(2x+3y+z)dz=$$

$$=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}\left(2xz+3yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}\left(6x+9y+\frac{9}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^4\left(6xy+\frac{9y^2}{2}+\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^{4-x}dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(6x(4-x)+\frac{9}{2}((4-x)^2+4-x)\right)dx=\int\limits_0^4\left(-\frac{3}{2}x^2-\frac{33}{2}x+144\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{2}-\frac{33x^2}{4}+144x\right)\Bigg|_0^4=-32-132+576=412.$$

б) В данном случае область Ω — параллелепипед. Расставляем пределы, проводим повторное интегрирование. Фактически все сводится к произведению трех независимых однократных интегралов:

$$\iiint\limits_{\Omega}(1-x)^3\sqrt{1-y^2}dxdydz=\int\limits_{-1}^1(1-x)^3dx\int\limits_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy\int\limits_{-3}^3 dz=$$

$$=\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^1\cdot\int\limits_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy\cdot\left(z\Big|_0^3\right)=12\pi.$$

Средний интеграл численно равен $\frac{\pi}{2}$ площади половины круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$.

в) Для решения задачи удобно перейти к цилиндрической системе координат $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$ с якобианом

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \rho, z)} = \rho.$$

При этом область Ω трансформируется в область

$$D = \left\{(\varphi, \rho, z):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant z \leqslant \rho \leqslant 1\right\}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz = \iiint\limits_{D} \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi}{\sqrt{z}} d\varphi d\rho dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\rho} \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int\limits_0^1 2\rho^3 \left(\sqrt{z}\right)\Big|_0^{\rho} d\rho = \int\limits_0^1 \rho^{\frac{7}{2}} d\rho = \frac{2}{9}\rho^{\frac{9}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}.$$

1.24. Найти объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

а) сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$ и параболоидом вращения $x^2 + y^2 = 2Rz$;

б) конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 6 - z$.

Р е ш е н и е.

а) Очевидно, что проекцией этого тела на плоскость XOY будет некоторый круг радиуса r_0. Введем цилиндрические координаты $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$. Определим прежде всего r_0. Для этого в уравнении сферы заменим $x^2 + y^2 = 2Rz$ (из уравнения параболоида). Получим квадратное уравнение относительно z:

$$z^2 + 2Rz - 3R^2 = 0.$$

Корни этого уравнения определяются по теореме Виета $z_1 = -3R$, $z_2 = R$. Первый корень отбрасываем. Теперь можно определить искомый r_0 (из уравнения сферы или параболоида) $x^2 + y^2 = 2Rz = 2R^2$, т. е. $r_0 = \sqrt{2}R$.

Объем тела вычисляем с помощью тройного интеграла:

$$V_{\Omega} = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{D} rdrd\varphi dz.$$

При переходе к цилиндрическим координатам область Ω трансформируется в область

$$D=\left\{(r,\varphi,z):\ \varphi\in[0,2\pi];\ 0\leqslant r\leqslant r_0;\ \frac{r^2}{2R}\leqslant z\leqslant\sqrt{3R^2-r^2}\right\}.$$

Получаем

$$V_\Omega=\iiint\limits_D rdrd\varphi dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r_0}rdr\int\limits_{\frac{r^2}{2R}}^{\sqrt{3R^2-r^2}}dz=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{r_0}\left(\sqrt{3R^2-r^2}-\frac{r^2}{2R}\right)rdr=\pi\int\limits_0^{r_0}\left(\sqrt{3R^2-r^2}-\frac{r^2}{2R}\right)dr^2=$$

$$=\pi\int\limits_0^{2R^2}\left(\sqrt{3R^2-t}-\frac{t}{2R}\right)dt=\pi\left(-\frac{2}{3}(3R^2-t)^{\frac{3}{2}}-\frac{t^2}{4R}\right)\Bigg|_0^{2R^2}=$$

$$=\pi\frac{6\sqrt{3}-5}{3}R^3.$$

б) Как и в предыдущем примере, вводим цилиндрические координаты $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $z=z$. Проекцией тела Ω на плоскость XOY также будет круг. Определим его радиус r_0. Для этого решаем квадратное уравнение относительно z:

$$z^2+z-6=0.$$

По теореме Виета $z_1=-3$, $z_2=2$. Следовательно, $r_0=2$ (получается из уравнения конуса $x^2+y^2=z^2$ подстановкой $z=2$).

Вычисляем объем в цилиндрических координатах. Учитываем, что область Ω при переходе к ним преобразуется в область $D=\{(r,\varphi,z):\varphi\in[0,2\pi];\ r\in[0,r_0];\ r\leqslant z\leqslant 6-r^2\}$.

$$V_\Omega=\iiint\limits_D rdrd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r_0}rdr\int\limits_r^{6-r^2}dz=2\pi\int\limits_0^2(6-r^2-r)rdr=$$

$$=2\pi\left(3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

1.25. Найти массу вещества, заполняющего общую часть двух сфер $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $x^2+y^2+z^2=2Rz$, если объемная плотность вещества в каждой точке пропорциональна расстоянию до плоскости XOY.

Р е ш е н и е. Проекцией тела на плоскость XOY является круг, радиус которого определяем из уравнения $r_0^2 = x^2 + y^2 = R^2 - z^2$, где $z = \frac{R}{2}$ (получается при совместном решении уравнений двух сфер). Таким образом, $r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. В этой задаче, как и в предыдущих, также перейдем к цилиндрическим координатам. При этом область

$$D = \left\{(r, \varphi, z):\ \varphi \in [0, 2\pi];\ 0 \leqslant r \leqslant r_0;\ R - \sqrt{R^2 - r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - r^2}\right\}.$$

Масса тела в цилиндрической системе координат вычисляется по формуле

$$M = \iiint\limits_D p \cdot r dr d\varphi dz,$$

где $p = kz$ — объемная плотность вещества ($k = \text{const}$). Проводим вычисления:

$$M = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r_0} r dr \int\limits_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z dz =$$

$$= k\pi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \left(R^2 - r^2 - \left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)^2\right) r dr =$$

$$= k\pi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \left(2R\sqrt{R^2 - r^2} - R^2\right) r dr =$$

$$= k\pi \left(-\frac{2R}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{R^2 r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = \frac{5\pi K}{24}R^4.$$

1.26. Найти центр тяжести полушара

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

у которого объемная плотность p вещества в каждой его точке пропорциональна расстоянию до начала координат.

Р е ш е н и е. Координаты центра тяжести тела Ω вычисляются по формулам

$$X_c = \frac{m_{yz}}{m};\quad Y_c = \frac{m_{zx}}{m};\quad Z_c = \frac{m_{xy}}{m},$$

где $m_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z \cdot p(M)dxdydz$ (статический момент тела Ω относительно плоскости XOY); $m_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x \cdot p(M)dxdydz$ (статистический момент тела Ω относительно плоскости YOZ); $m_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} y \cdot p(M)dxdydz$ (статический момент тела Ω относительно плоскости XOZ); $m = \iiint\limits_{\Omega} p(M)dxdydz$ (масса тела Ω).

Поскольку форма тела Ω и распределение масс симметричны относительно оси z, центр тяжести также будет лежать на этой оси, т. е. $X_c = Y_c = 0$.

Для расчетов в этой задаче удобно перейти к сферической системе координат $x = r\sin\theta\cos\varphi$; $y = r\sin\theta\sin\varphi$; $z = r\cos\theta$. При этом область Ω соответствует области

$$D = \left\{(r, \varphi, \theta):\ r \in [0, R];\ \varphi \in [0, 2\pi);\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Якобиан этого преобразования J равен

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta.$$

Перейдем к соответствующим расчетам (по условию $p = kr$, $k = \text{const}$):

$$m_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z \cdot p(M)dxdydz = k \iiint\limits_{D} r^4 \cdot \sin\theta\cos\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{R} r^4 dr = \frac{k\pi R^5}{5};$$

$$m = \iiint\limits_{\Omega} p(M)dxdydz = k \iiint\limits_{D} r^3 \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{R} r^3 dr = \frac{k\pi R^4}{2};$$

$$Z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{2}{5}R.$$

1.27. Тело Ω ограничено плоскостями $x = 2$; $y = 0$; $y = 1$; $z = 0$ и цилиндром $z^2 = 6x$. Объемная плотность вещества в каждой его точке пропорциональна расстоянию до плоскости XOY. Найти момент инерции тела Ω относительно оси z.

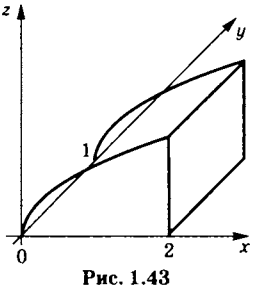

Рис. 1.43

Р е ш е н и е. По определению, момент инерции неоднородного тела Ω относительно оси z вычисляется по формуле

$$I_{OZ} = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)p(M)dxdydz,$$

где $p(M) = k \cdot z$, $k = \text{const}$ (объемная плотность вещества).

Тело Ω показано на рис. 1.43. Проведем необходимые вычисления:

$$I_{OZ} = k\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{6x}} (x^2 + y^2)z\,dz = k\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{6x}} dy =$$

$$= 3k\int_0^2 \left(x^3 + \frac{x}{3}\right)dx = 3k\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^2 = 14k.$$

1.28. Найти полярный момент инерции однородного тела, ограниченного конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Р е ш е н и е. По определению, полярный момент инерции (т. е. момент инерции относительно начала координат) вычисляется по формуле

$$I_0 = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)p(M)dxdydz.$$

В этой задаче $p = \text{const}$ (однородность тела Ω) и в силу симметрии тела удобно перейти к сферической системе координат $x = r\sin\theta\cos\varphi$; $y = r\sin\theta\sin\varphi$; $z = r\cos\theta$ с якобианом $J = r^2\sin\theta$. При этом переходе область Ω трансформируется в область

$$D = \left\{(r, \theta, \varphi):\ r \in [0, R];\ \varphi \in [0, 2\pi);\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

Вычисление тройного интеграла сведется к произведению однократных интегралов по каждой переменной r, θ, φ:

$$I_0 = \iiint_D r^2 \cdot p \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = p \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr =$$

$$= p \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{R^5}{5} = \pi p R^5 \left(2 - \sqrt{2}\right).$$

1.29. Найти объем n-мерной пирамиды Ω:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad a_1 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Р е ш е н и е. Речь идет о вычислении n-кратного интеграла

$$\mu(\Omega) = V_\Omega = \int_\Omega \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \ldots \int_0^{a_n\left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \ldots - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right)} dx_n.$$

Прежде всего введем новые переменные $x_i = a_i t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ с якобианом

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Пирамида Ω:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \leqslant 1$$

трансформируется в пирамиду D:

$$\sum_{i=1}^n t_i \leqslant 1,$$

и исходный интеграл преобразуется по формуле (1.98)

$$\int_\Omega \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_D \ldots \int \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \int_D \ldots \int dt_1 dt_2 \ldots dt_n.$$

Рассчитаем последний n-кратный интеграл:

$$\int\limits_D \dots \int dt_1 dt_2 \dots dt_n = \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int\limits_0^{1-t_1-\dots-t_{n-1}} dt_n =$$

$$= \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int\limits_0^{1-t_1-\dots-t_{n-2}} (1-t_1-\dots-t_{n-1}) dt_{n-1} =$$

$$= \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \dots$$

$$\dots \int\limits_0^{1-t_1-\dots-t_{n-3}} \left(-\frac{(1-t_1-\dots-t_{n-1})^2}{2} \right) \Bigg|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=1-t_1-\dots-t_{n-2}} dt_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int\limits_0^{1-t_1-\dots-t_{n-3}} (1-t_1-\dots-t_{n-2})^2 dt_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int\limits_0^{1-t_1-\dots-t_{n-4}} (1-t_1-\dots-t_{n-3})^2 dt_{n-3} =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} (1-t_1-t_2)^{n-2} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^1 (1-t_1)^{n-1} dt_1 = \frac{1}{n!} (1-t_1)^n \Big|_0^1 = \frac{1}{n!}.$$

Следовательно, объем пирамиды Ω: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} \leqslant 1$; $a_i > 0$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ равен

$$V_\Omega = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{n!}.$$

1.30. Исследовать на абсолютную сходимость несобственные кратные интегралы:

а) $\iint\limits_\Omega \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^\rho} dxdy$, где Ω: $x^2+y^2 \leqslant 1$ и Ω: $x^2+y^2 \geqslant 1$; $\varphi(x, y)$ — ограниченная на Ω функция;

б) $\iiint\limits_\Omega \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^\rho} dxdydz$, где Ω: $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ и Ω: $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$; $\varphi(x, y, z)$ — ограниченная на Ω функция.

Р е ш е н и е.

а) В силу ограниченности $\varphi(x, y)$ на Ω ($|\varphi(x, y)| \leqslant C$, $(x, y) \in \Omega$) абсолютная сходимость исследуемого интеграла определяется сходимостью интеграла

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}.$$

Для выяснения этой сходимости введем полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$ и получим

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \iint\limits_{D} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^{2p}} = \begin{cases} 2\pi \int\limits_{1}^{\infty} \rho^{(1-2p)} d\rho; \\ 2\pi \int\limits_{0}^{1} \rho^{(1-2p)} d\rho. \end{cases}$$

Если Ω: $x^2 + y^2 \leqslant 1$, тогда исходный интеграл сходится при $2p - 1 < 1$, т. е. $p < 1$.

Если Ω: $x^2 + y^2 \geqslant 1$, тогда интеграл сходится абсолютно при $2p - 1 > 1$, т. е. $p > 1$.

При $p = 1$ в обоих случаях абсолютной сходимости нет, а следовательно, по теореме 1.6 несобственный интеграл расходится.

б) Так же, как и в а), абсолютная сходимость исследуемого интеграла зависит от сходимости интеграла

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}.$$

Чтобы исследовать эту сходимость, введем сферические координаты $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$; $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\theta$, получим

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \iint\limits_{D} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho^{2p}} = \begin{cases} 4\pi \int\limits_{1}^{\infty} \rho^{2(1-p)} d\rho; \\ 4\pi \int\limits_{0}^{1} \rho^{2(1-p)} d\rho. \end{cases}$$

Если Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, приходим к несобственному интегралу $\int\limits_{0}^{1} \rho^{2(1-p)} d\rho$, который сходится при $2p - 2 < 1$, т. е. $p < \frac{3}{2}$.

Если Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, необходимо рассматривать несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \rho^{2(1-p)} d\rho$, который сходится абсолютно при $2p - 2 > 1$, т. е. $p > \frac{3}{2}$.

Если $p = \frac{3}{2}$ в обоих случаях, абсолютной сходимости нет, а следовательно, согласно теореме 1.6 несобственный интеграл расходится.

1.7. ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

Вычислить повторные интегралы.

1.31. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 (x^2 + y^2) dy.$

1.32. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{x} \frac{x dy}{x^2 + y^2}.$

1.33. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1 + x + y)^3}.$

1.34. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3 dr.$

В заданных повторных интегралах определить область интегрирования Ω.

1.35. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x+5} f(x, y) dy.$

1.36. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$

1.37. $\int\limits_1^2 \int\limits_{\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y) dx dy.$

Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах.

1.38. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx.$

1.39. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy.$

1.40. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x, y) dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x, y) dx.$

1.41. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy.$

1.42. $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy.$

1.43. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x,y)dy.$ **1.44.** $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy.$

1.45. $\int\limits_{0}^{2\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy.$

Вычислить двойные интегралы.

1.46. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{xy-y^2}\,dxdy$, где Ω — трапеция с вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(10, 2)$, $D(2, 2)$.

1.47. $\iint\limits_{\Omega} (x+2y)dxdy,$

где $\Omega = \left\{(x,y):\ x \in [0,1];\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}.$

1.48. $\iint\limits_{\Omega} \frac{xdxdy}{x^2+y^2},$

где $\Omega = \left\{(x,y):\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];\ x\operatorname{tg}x \leqslant y \leqslant x\right\}.$

1.49. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{a^2+x^2}\,dxdy,$

где $\Omega = \left\{(x,y):\ x \in [-|a|, |a|];\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2+x^2}\right\}.$

1.50. $\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy$, где область Ω ограничена осью OX и аркой циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $x = a\,(t - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$.

1.51. $\iint\limits_{\Omega}\cos^2 x\cos^2 y\,dxdy,$

где $\Omega=\left\{(x,y):\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$

1.52. $\iint\limits_{\Omega}|xy|dxdy,$ где $\Omega=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant a^2\}.$

1.53. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}},\ a>0,$ где $\Omega=\{(x,y):\ (x-a)^2+(y-a)^2\geqslant$ $\geqslant a^2,\ x\in[0,a];\ y\in[0,a]\}.$

Переходом к полярным координатам вычислить двойные интегралы.

1.54. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2-9}dxdy,$

где $\Omega=\{(x,y):\ 9\leqslant x^2+y^2\leqslant 25\}.$

1.55. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$

где $\Omega=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant a^2;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0\}.$

1.56. $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy,$

где $\Omega=\{(x,y):\ x^2+y^2\geqslant ax;\ x^2+y^2\leqslant 2ax\}.$

1.57. $\iint\limits_{\Omega}e^{x^2+y^2}dxdy,$

где $\Omega=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant a^2;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0\}.$

Перейти к полярным координатам.

1.58. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy.$

1.59. $\iint\limits_{\Omega}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$ где $\Omega:\ x^2+y^2\leqslant 1.$

1.60. $\iint\limits_{\Omega}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$ где $\Omega=\{(x,y):\ |x|\leqslant 1;\ |y|\leqslant|x|\}.$

1.61. $\iint\limits_{\Omega} f\left(\frac{x}{y}\right)dxdy$, где $\Omega = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \leqslant x\}$.

Ввести новые переменные в следующих двойных интегралах.

1.62. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x, y)dy$, $u = x + y$, $v = x - y$.

1.63. $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$,

где Ω: $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{a}$, $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

1.64. $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$,

где Ω: $1 \leqslant xy \leqslant 2$, $1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 4$, $x > 0$, $y > 0$.

1.65. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, где Ω: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями.

1.66. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$, $0 < a < b$.

1.67. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = 2ax$.

1.68. $(x + y)^4 = ax^2y$, $a > 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

1.69. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$.

1.70 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$,

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $a > 0$, $b > 0$.

1.71. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$,

$8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$.

Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями, вводя обобщенные полярные координаты.

$$x = ar \cdot \cos^{\alpha}\varphi,$$
$$y = br \cdot \sin^{\alpha}\varphi,$$

где a, b, α — постоянные, зависящие от вида заданных линий.

1.72. $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{y^3}{b^3}=\dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2}$, $x=0$, $y=0$.

1.73. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^5=\dfrac{x^2y^2}{c^4}$.

1.74. $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$; $x=y=0$,

$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=2$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $4\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $a>0$, $b>0$.

1.75. Найти площадь части поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$, вырезаемой плоскостями $x=y=0$, $x+y=2a$.

1.76. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=2a^2$, заключенной внутри конуса $x^2+z^2=y^2$.

1.77. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной между плоскостями

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3}y,\quad z=y\quad (z\geqslant 0,\quad y\geqslant 0).$$

1.78. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезаемой из нее цилиндром $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Найти объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

1.79. $z^2-x^2=a^2$, $z^2-y^2=a^2$, $z=a\sqrt{2}$, $a>0$.

1.80. $x^2-y^2=2az$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $a>0$.

1.81. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

1.82. $z=xy$, $xy=1$, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$, $x>0$, $y>0$.

1.83. $z=x^2+y^2$, $xy=1$, $xy=2$, $y^2=x$, $y^2=3x$.

Переходя к полярным координатам, найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями.

1.84. $z = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

1.85. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

1.86. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \geqslant a|x|$, $a > 0$.

1.87. $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$, $a > 0$.

1.88. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

1.89. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

1.90. $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

1.91. Найти массу пластины, имеющей форму прямоугольного треугольника (катеты $OA = a$, $OB = b$), если плотность ее в любой точке пропорциональна расстоянию точки от катета OA.

1.92. Найти массу круглой пластины радиуса R, если плотность ее пропорциональна квадрату расстояния от точки до центра.

1.93. Найти статические моменты относительно осей OX и OY однородной пластины, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

1.94. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = a^2$, $y^2 = 8ax$, $x = 2a$ $(a > 0)$.

Найти координаты центра тяжести однородных пластин, ограниченных заданными линиями.

1.95. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

1.96. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $x > 0$, $y > 0$.

1.97. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$, $y > 0$.

1.98. $r = a\sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Найти моменты инерции I_x, I_y однородной фигуры, ограниченной заданными линиями.

1.99. $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$.

1.100. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 1$, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 1$, $y = 0$.

1.101. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $x = y = 0$, $x \geqslant 0$.

1.102. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

1.103. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$, $y > 0$.

1.104. Найти центробежный момент инерции I_{xy} однородной пластины, ограниченной линиями $ay = x^2$, $ax = y^2$, $a > 0$.

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$ для заданных областей Ω.

1.105. Ω — тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x + 3y + 4z = 12$, $x = y = z = 0$.

1.106. $\Omega = \left\{(x, y, z): \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$.

1.107. Ω ограничена поверхностями $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

1.108. $\Omega = \{(x, y, z): x \in [0, 1]; \ y \in [0, 1]; \ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}$.

1.109. $\Omega = \{(x, y, z): \ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1; \ z \geqslant 0\}$.

Вычислить тройные интегралы.

1.110. $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z^4dxdydz$,

где $\Omega = \{(x, y, z): \ |x| \leqslant 1; \ |y| \leqslant 2; \ |z| \leqslant 2\}$.

1.111. $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$,

где $\Omega = \{(x, y, z): \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0\}$.

1.112. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$,

где $\Omega = \{(x, y, z): \ x + y + z \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0\}$.

1.113. $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$,

где $\Omega = \{(x, y, z): \ x^2 + y^2 \leqslant z^2 \leqslant 1, \ z \geqslant 0\}$.

Переходя к цилиндрическим или сферическим координатам, вычислить тройные интегралы.

1.114. $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$,

где $\Omega = \left\{\begin{array}{l}(x, y, z): \ y \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 - y^2}, \\ 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{x^2 - y^2}{a}, \ \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}$.

1.115. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz,$

где $\Omega=\{(x, y, z):\ x^2+y^2\leqslant 2z\leqslant 4\}$.

1.116. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$

где $\Omega=\{(x, y, z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant z\}$.

1.117. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz,$

где $\Omega=\left\{(x, y, z):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$.

1.118. Переходом к криволинейным координатам

$$u=\frac{y}{x},\quad v=xy,\quad w=\frac{x^2+y^2}{z}$$

вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz,$$

где $\Omega=\left\{(x, y, z):\ \alpha\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\beta,\ b^2\leqslant xy\leqslant a^2,\ m\leqslant\frac{x^2+y^2}{z}\leqslant n\right\}$,

$0<a<b,\ 0<\alpha<\beta,\ 0<m<n,\ x>0,\ y>0,\ z>0$.

1.119. Найти среднее значение функции в указанной области.

а) $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2,\ \Omega=\{(x, y, z):$
$x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z\}$;

б) $f(x, y, z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}},\ \Omega=\left\{(x, y, z):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$.

Вычислить объемы трехмерных областей, ограниченных заданными поверхностями.

1.120. $z=x+y,\ z=xy,\ x+y=1,\ x=y=0$.

1.121. $x^2+z^2=a^2,\ x+y=\pm a,\ x-y=\pm a$.

1.122. $z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

1.123. $z=6-x^2-y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

1.124. $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

1.125. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xyz$.

1.126. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. (Указание: перейти к обобщенным сферическим координатам.)

1.127. $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $z = \dfrac{x^2 + y^2}{3a}$ (внутри параболоида).

1.128. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$.

1.129. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geqslant 0$, $0 < a < b$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, используя подходящую замену переменных.

1.130. $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$, $y > 0$.

1.131. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}} + \sqrt[3]{\dfrac{y}{b}} + \sqrt[3]{\dfrac{z}{c}} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

1.132. $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.133. Найти массу конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от начала координат

$$p = k \cdot r^2 \quad (k = \text{const}) \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

1.134. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 - y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$, если плотность $p = kz$ $(k = \text{const})$.

1.135. Найти массу сферического слоя между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, если плотность

$$p = k \cdot r^2, \quad k = \text{const}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями.

1.136. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2,\ z=1.$

1.137. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x=y=z=0.$

1.138. $x^2=4z,\ y^2=4x,\ y=1,\ z=0.$

1.139. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=y=z=0.$

1.140. $x^2+y^2=1,\ y^2+z^2=1z\geqslant 0.$

1.141. $x^2+y^2=2z,\ x+y=z.$

1.142. $z=x^2+y^2,\ 2z=x^2+y^2,\ x+y=\pm 1,\ x-y=\pm 1.$

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных заданными поверхностями.

1.143. $x+y+z=1,\ x=y=x=0.$

1.144. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,\ z=1.$

1.145. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}.$

1.146. $x^2+y^2=2z,\ x+y=z.$

Вычислить несобственные двойные интегралы.

1.147. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{x^p y^q}$, где $\Omega=\{(x, y):\ x\geqslant 1,\ xy\geqslant 1\}.$

1.148. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{(x+y)^p}$, где $\Omega=\{(x, y):\ x\in[0, 1],\ x+y\geqslant 1\}.$

1.149. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$, где $\Omega=\{(x, y):\ x^2+y^2\geqslant 1\}.$

1.150. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{x^4+y^2}$, где $\Omega=\{(x, y):\ y^2\geqslant x^2+1\}.$

1.151. $\iint\limits_{\Omega}e^{-(x+y)}dxdy$, где $\Omega:\ 0\leqslant x\leqslant y.$

Переходя к полярным координатам, вычислить несобственные интегралы.

1.152. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$

1.153. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2-y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dxdy.$

1.154. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dxdy.$

Исследовать на сходимость несобственные двойные интегралы от неограниченных функций.

1.155. $\iint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdy}{(x^2+xy+y^2)^p}$, где Ω: $x^2+y^2\leqslant 1$.

1.156. $\iint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$, где Ω: $|x|+|y|\leqslant 1$.

1.157. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\dfrac{dxdy}{|x-y|^p}$.

1.158. $\iint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}$, где Ω: $x^2+y^2\leqslant 1$.

Исследовать на сходимость несобственные тройные интегралы.

1.159. $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$, где Ω: $|x|+|y|+|z|\geqslant 1$, $p>0$, $q>0$, $r>0$.

1.160. $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{|x+y+z|^p}$, где $\Omega=\{(x,y,z)$: $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1\}$, $p>0$.

ГЛАВА 2

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

2.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

Определение 2.1. Множество точек L плоскости R_2, определяемое условиями:

1. $L = \{(x, y): x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b], a < b\}$;

2. функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль, т. е. $\varphi(t), \psi(t) \in C^1[a, b] \wedge \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0$, $t \in [a, b]$;

3. $t_1, t_2 \in (a, b)$ $(t_1 < t_2)$ справедливо неравенство

$$(\varphi(t_1) - \varphi(t_2))^2 + (\psi(t_1) - \psi(t_2))^2 > 0,$$

называется простой гладкой кривой на плоскости.

Замечание 2.1. Условие 2 определения геометрически означает существование в каждой точке кривой L единичного касательного вектора

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}}, \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} \right), \tag{2.1}$$

а также единичного нормального вектора

$$\vec{k} = \left(-\frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}}, \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} \right) \tag{2.2}$$

(точка над функцией означает производную по параметру t, т. е., например, $\dot{\varphi}(t) = \dfrac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$).

Условие 3 означает, что кривая L не имеет точек самопересечения.

Если для конечного набора значений параметра t: $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqslant b$ условие 2 нарушается, тогда кривая L называется кусочно-гладкой кривой на плоскости. Типичным примером кусочно-гладкой кривой является ломаная линия. Кривую L можно ориентировать двумя различными способами. Пусть значениям параметра $t = a$ и $t = b$ отвечают концевые точки кривой L: $A(\varphi(a), \psi(a))$ и $B(\varphi(b), \psi(b))$, тогда при возрастании параметра t от a до b кривая будет проходить от точки A к точке B. Такую ориентированную кривую в дальнейшем будем обозначать L_{AB}. Другую ориентацию кривой L получим после введения нового параметра $\tau = a + b - t$. В этом случае координаты точек кривой L задаются уравнениями $x = \varphi(a + b - \tau)$, $y = \psi(a + b - \tau)$, и при возрастании τ от a до b кривая L будет проходить от точки B до точки A. Такую ориентированную кривую будем обозначать L_{BA}.

В случае совпадения концевых точек $A = B$ получаем простую замкнутую кривую L, которую коротко в дальнейшем будем называть контуром. Контур можно ориентировать, если удалить из него любую дугу достаточно малой длины, и тем самым получить незамкнутую кривую, которая ориентируется так, как это было указано выше. Если контур лежит на плоскости R_2, то он является границей некоторой области $\Omega \in R_2$. В этом случае ориентация контура задается направлением обхода: положительным направлением обхода называется такое, при котором область Ω остается слева, противоположное направление обхода называется отрицательным.

Кривая L в пространстве R_3 задается аналогично предыдущему. При этом вводится третья координата $z = \chi(t)$ и условия 2 и 3 определения заменяются соответственно на $x = \varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t) \in C^1[a, b] \wedge \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2 > 0$ $(\forall t \in [a, b])$, $(\varphi(t_1) - \varphi(t_2))^2 + (\psi(t_1) + \psi(t_2))^2 + (\chi(t_1) + \chi(t_2))^2 > 0$ $(a < t_1 < t_2 < b)$. Ориентированные пространственные кривые L будем также обозначать L_{AB} и L_{BA}. Единичный касательный вектор $\bar{\tau}$ для кривой в пространстве определяется следующим образом:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2}} (\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\chi}), \qquad (2.3)$$

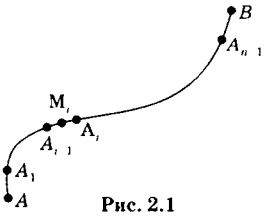

Рис. 2.1

Определение 2.2. Непрерывная функция $u(M) = u(x, y)$ ($u(M) = u(x, y, z)$) точки $M \in R_2$ ($M \in R_3$), определенная в некоторой области $\Omega \in R_2$ ($\Omega \in R_3$), называется скалярным полем на плоскости (в пространстве).

Выберем на ориентированной кривой $L_{AB} \in \Omega$ (на плоскости или в пространстве) точки $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ (рис. 2.1).

Обозначим длину кривой между точками A_{i-1}, A_i через Δl_i ($i = 1, \ldots, n$), $\max\limits_i \{\Delta l_i\} = \Delta l$. Пусть M_i — точки кривой L_{AB}, лежащие между A_{i-1} и A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta l_i. \tag{2.4}$$

Определение 2.3. Если при $\Delta l \to 0$ существует предел интегральной суммы (2.4), не зависящий от выбора точек A_i, M_i на кривой L_{AB}, то он называется криволинейным интегралом I рода от скалярного поля $u(M) = u(x, y)$ ($u(M) = u(x, y, z)$) по кривой L и обозначается

$$\lim_{\Delta l \to 0} I_n = \int_{L_{AB}} u(M)dl. \tag{2.5}$$

Нетрудно выразить криволинейный интеграл I рода (2.5) через определенный интеграл по переменной $t \in [a, b]$. Действительно, выбору точек A_i, M_i на кривой L отвечает некоторый выбор значений t на отрезке $[a, b]$: $a = t_0 < \xi_1 < t_1 < \xi_2 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < \xi_n < t_n = b$. Далее, как известно (см. часть II):

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,dt \approx \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i) + \dot{\psi}^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i$$

(на плоскости),

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2}\,dt \approx \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i) + \dot{\psi}^2(\xi_i) + \dot{\chi}^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i \tag{2.6}$$

(в пространстве).

Учтем также, что

$$u(M_i) = u(\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i)) \text{ (на плоскости)},$$
$$u(M_i) = u(\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i), \chi(\xi_i)) \text{ (в пространстве)}. \quad (2.7)$$

Принимая во внимание (2.5), (2.6), (2.7), получаем:

$$\lim_{\lambda l \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta l_i = \lim_{\lambda l \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\varphi(\xi_i),$$
$$\psi(\xi_i))\sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i) + \dot{\psi}^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i = \quad (2.8)$$
$$= \int_a^b u(\varphi(t),\ \psi(t))\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,dt \quad \text{(на плоскости)},$$

$$\lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta l_i = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\varphi(\xi_i),$$
$$\psi(\xi_i),\ \chi(\xi_i))\sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i) + \dot{\psi}^2(\xi_i) + \dot{\chi}^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i = \quad (2.9)$$
$$= \int_a^b u(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}}\,dt \quad \text{(в пространстве)}.$$

Поскольку криволинейный интеграл I рода (2.5) сводится по формулам (2.8), (2.9) к определенному интегралу, то и его свойства аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Перечислим основные из них.

1. Значение криволинейного интеграла I рода не зависит от способа ориентации кривой L, т. е.

$$\int_{L_{AB}} u(M)dl = \int_{L_{BA}} u(M)dl. \quad (2.10)$$

2. Свойство линейности криволинейного интеграла I рода.

Если $u(M) = \sum_{i=1}^{m} C_i u_i(M)$ $(C_i = \text{const})$, то

$$\int_{L_{AB}} u(M)dl = \sum_{i=1}^{m} C_i \int_{L_{AB}} u_i(M)dl. \quad (2.11)$$

3. Свойство аддитивности криволинейного интеграла I рода.

Если кривая L составлена из нескольких кривых L_i: $L = \bigcup_{i=1}^{p} L_i$ (например, L_i звенья ломаной L), то

$$\int_L u(M)dl = \sum_{i=1}^{p} \int_{L_i} u(M)dl. \tag{2.12}$$

4. Формула среднего значения.

На кривой L существует точка P:

$$\int_L u(M)dl = u(P)\cdot l, \tag{2.13}$$

где l — длина кривой L.

5. Если в точках кривой L скалярное поле неотрицательно $u(M) \geqslant 0$, $M \in L$, то

$$\int_L u(M)dl \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Непосредственно из 5) в качестве следствий получаем:

а) если скалярное поле $u_2(M)$ мажорирует поле $u_1(M)$ на L (т. е. $u_2 \geqslant u_1$), то

$$\int_L u_2(M)dl \geqslant \int_L u_1(M)dl;$$

б) $\int_L |u(M)|\,dl \geqslant \left|\int_L u(M)dl\right|$.

Теперь перечислим некоторые простейшие приложения криволинейного интеграла I рода и формулы, с ними связанные.

1. Расчет длины дуги кривой L.

Если в точках кривой L скалярное поле $u(M)$ равно единице, тогда

$$\int_L 1\cdot dl = \int_L dl = l, \tag{2.15}$$

где l — длина кривой L.

2. Расчет массы кривой L.

Если поле $u(M)$ представляет линейную плотность массы кривой L, тогда масса этой кривой $M(L)$ вычисляется с помощью криволинейного интеграла I рода по формуле

$$M(L) = \int_L u(M)dl. \tag{2.16}$$

3. Расчет координат центра тяжести кривой L с линейной плотностью массы $u(M)$ проводится по формулам:

$$X_C(L)=\frac{1}{M(L)}\cdot\int_a^b\varphi(t)\cdot u(\varphi,\psi)\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt,$$

$$Y_C(L)=\frac{1}{M(L)}\cdot\int_a^b\psi(t)\cdot u(\varphi,\psi)\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt \qquad (2.17)$$

(на плоскости),

$$X_C(L)=\frac{1}{M(L)}\cdot\int_a^b\varphi(t)\cdot u(\varphi,\psi,\chi)\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+\dot\chi}\,dt,$$

$$Y_C(L)=\frac{1}{M(L)}\cdot\int_a^b\psi(t)\cdot u(\varphi,\psi,\chi)\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+\dot\chi}\,dt, \qquad (2.18)$$

$$Z_C(L)=\frac{1}{M(L)}\cdot\int_a^b\chi(t)\cdot u(\varphi,\psi,\chi)\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+\dot\chi}\,dt$$

(в пространстве),

где $M(L)$ — масса кривой L, рассчитываемая по формуле (2.16).

2.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Определение 2.4. Упорядоченная пара функций $P(M)$, $Q(M)$, $M(x, y)\in\Omega\subset R_2$ (тройка функций $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, $M(x, y, z)\in\Omega\subset R_3$), определенных в области $\Omega\subset R_2(\Omega\subset R_3)$ называется векторным полем на плоскости (в пространстве) и обозначается

$$\vec F=(P(x,y),\ Q(x,y))\quad(\vec F=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))).$$

Примером векторного поля является градиент некоторого скалярного поля $u(x, y)$ $(u(x, y, z))$. По определению,

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad}u=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)\ \text{(на плоскости)},\\ &\operatorname{grad}u=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)\ \text{(в пространстве)}.\end{aligned}\qquad (2.19)$$

Более подробно свойства ∇u рассмотрены в части II.

Определение 2.5. Дивергенцией непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ называется скалярное поле $\operatorname{div}\vec{F}$ $(\nabla\vec{F})$, определяемое по формуле

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{2.20}$$

Определение 2.6. Ротором (вихрем) непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ называется векторное поле $\operatorname{rot}\vec{F}$ $(\nabla \times \vec{F})$, компоненты которого вычисляются по символической формуле

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \tag{2.21}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

В этих формулах используется оператор Гамильтона $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ — символический вектор, компоненты которого суть операторы частного дифференцирования.

Замечание 2.2. В формуле (2.20) оператор Гамильтона ∇ умножается скалярно на вектор поля $\vec{F}$, а в формуле (2.21) используется векторное умножение.

Справедливы следующие формулы, которые часто используются в векторном анализе при различных вычислениях:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = (\nabla \times \nabla u) = \vec{0}, \tag{2.22}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0. \tag{2.23}$$

В формулах (2.22), (2.23) отражены известные из векторной алгебры свойство векторного произведения (векторное произведение вектора самого на себя есть нуль-вектор) и смешанного произведения (при совпадении двух сомножителей смешанное произведение обращается в нуль).

Выберем на ориентированной кривой $L_{AB} \subset \Omega$ (на плоскости или в пространстве) точки $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$. Обозначим вектор $A_{i-1}A_i = \Delta\vec{r}_i$. Пусть M_i — точки кривой L_{AB}, лежащие между A_{i-1} и A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть, наконец, $\Delta r = \max_i |\Delta\vec{r}_i|$. Составим интегральную сумму J_n:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \Delta\vec{r}_i. \tag{2.24}$$

Слагаемые суммы (2.24) суть скалярные произведения непрерывного векторного поля $\vec{F}$, взятого в точках M_i кривой L_{AB} на вектор $\Delta\vec{r}_i = \vec{A}_{i-1}\vec{A}_i$. Сумму (2.24) можно записать также и в координатной форме:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i \quad \text{(на плоскости)}, \tag{2.25}$$

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i \quad \text{(в пространстве)}. \tag{2.26}$$

В этих формулах $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ компоненты вектора $\vec{A}_{i-1}\vec{A}_i$.

Определение 2.7. Если при $\Delta r \to 0$ существует предел интегральной суммы (2.24), не зависящий от выбора точек A_i, M_i на кривой L_{AB}, то он называется криволинейным интегралом II рода от векторного поля $\vec{F}$ вдоль кривой L_{AB} и обозначается

$$\lim_{\Delta r \to 0} J_n = \int_{L_{AB}} \vec{F}(M) \cdot d\vec{r} = \begin{cases} \displaystyle\int_{L_{AB}} P dx + Q dy \\ \text{(на плоскости)}, \\ \displaystyle\int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz \\ \text{(в пространстве)}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Можно получить выражение криволинейного интеграла II (2.27) через определенный интеграл по параметру t, с помощью которого определяется ориентированная кривая L_{AB}. В самом деле, выбору точек A_i, M_i на кривой L_{AB} отвечает некоторый выбор значений параметра t

на отрезке $[a, b]$: $a = t_0 < \xi_1 < t_1 < \xi_2 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < \xi_n < t_n = b$. Далее, как известно,

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \approx \dot{\varphi}(\xi_i)\Delta t_i, \\ \Delta y_i &= y_i - y_{i-1} = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) \approx \dot{\psi}(\xi_i)\Delta t_i, \\ \Delta z_i &= z_i - z_{i-1} = \chi(t_i) - \chi(t_{i-1}) \approx \dot{\chi}(\xi_i)\Delta t_i. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Учтем также, что

$$\begin{aligned} &\vec{F}(M_i) = (P(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i)),\ Q(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i))) \ \text{(на плоскости)}, \\ &\vec{F}(M_i) = (P(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i),\ \chi(\xi_i)),\ Q(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i), \\ &\chi(\xi_i)),\ R(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i),\ \chi(\xi_i))) \ \text{(в пространстве)}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Принимая во внимание (2.28), (2.29), а также суммы (2.25), (2.26), получаем:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta r \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \\ &= \lim_{\max_i \{\Delta t_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i))\ \dot{\varphi}(\xi_i) + Q(\varphi(\xi_i), \\ &\psi(\xi_i))\ \dot{\psi}(\xi_i))\Delta t_i = \\ &= \int_a^b (P(\varphi(t),\ \psi(t))\ \dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\ \dot{\psi}(t))dt \end{aligned} \tag{2.30}$$

(на плоскости),

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta r \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \\ &= \lim_{\max_i \{\Delta t_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i),\ \chi(\xi_i))\ \dot{\varphi}(\xi_i) + Q(\varphi(\xi_i), \\ &\psi(\xi_i),\ \chi(\xi_i))\ \dot{\psi}(\xi_i) + \\ &+ R(\varphi(\xi_i),\ \psi(\xi_i),\ \chi(\xi_i))\ \dot{\chi}(\xi_i))\Delta t_i = \\ &= \int_a^b (P(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\ \dot{\varphi}(t) + Q(\varphi,\ \psi,\ \chi)\ \dot{\psi} + R(\varphi,\ \psi,\ \chi)\ \dot{\chi})dt \end{aligned} \tag{2.31}$$

(в пространстве).

Укажем основные свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении ориентации кривой L криволинейный интеграл II рода меняет знак, т. е.

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(M)d\vec{r} = -\int\limits_{L_{BA}} \vec{F}(M)d\vec{r}. \tag{2.32}$$

2. Свойство линейности криволинейного интеграла II рода.

Если $\vec{F}(M) = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i \vec{F}_i(M)$ $(C_i = \text{const})$, тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(M)d\vec{r} = \sum_{i=1}^{m} C_i \int\limits_{L_{AB}} \vec{F}_i(M)d\vec{r}. \tag{2.33}$$

3. Свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода.

Если ориентированная кривая L_{AB} составлена из нескольких ориентированных кривых L_i: $L_{AB} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} L_i$, тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(M)d\vec{r} = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{L_i} \vec{F}(M)d\vec{r}. \tag{2.34}$$

Криволинейный интеграл (2.27) II рода имеет простую физическую интерпретацию: численно он равен работе силового поля при перемещении точки вдоль ориентированной кривой L_{AB}. Если L — ориентированный контур, то криволинейный интеграл вдоль него называется ц и р к у л я ц и е й векторного поля по замкнутой кривой L и обозначается $\oint\limits_L \vec{F}d\vec{r}$. Циркуляция не зависит от выбора точки на контуре. Действительно, используя свойство аддитивности криволинейного интеграла (2.34), получаем (рис. 2.2):

$$\oint\limits_{AmBnA} \vec{F}d\vec{r} = \oint\limits_{AmB} \vec{F}d\vec{r} + \oint\limits_{BnA} \vec{F}d\vec{r},$$

$$\oint\limits_{BnAmB} \vec{F}d\vec{r} = \oint\limits_{BnA} \vec{F}d\vec{r} + \oint\limits_{AmB} \vec{F}d\vec{r}.$$

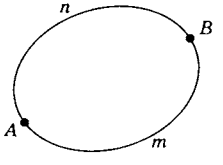

Рис. 2.2

Так как правые части этих равенств равны между собой, то также равны и левые части, т. е.

$$\oint\limits_{AmBnA} \vec{F}d\vec{r} = \oint\limits_{BnAmB} \vec{F}d\vec{r}.$$

Определение 2.8. Векторное поле $\vec{F}(M)\,(M \in \Omega)$ называется потенциальным, если оно совпадает с градиентом некоторого скалярного поля $u(M)\,(M \in \Omega)$, т. е.

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u = \nabla u(M). \tag{2.35}$$

При этом скалярное поле $u(M)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{F}(M)$.

Потенциал $u(M)$ векторного поля $\vec{F}(M)$ определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Для потенциальности векторного поля $\vec{F}(M)\,(M \in \Omega)$ на плоскости (в пространстве) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\vec{F} = (P, Q), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2.36}$$

где $M \in \Omega$ — односвязная область на плоскости (см. § 2.5).

$$\vec{F} = (P, Q, R), \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{0}, \tag{2.37}$$

где $M \in \Omega$ — поверхностно-односвязная область в пространстве (см. § 2.7).

Если (2.36), (2.37) имеют место в указанных областях Ω, то для определения потенциала $u(M)$ используют криволинейные интегралы II рода от поля $\vec{F}$ вдоль ломаной линии, соединяющей произвольную начальную точку $M(x_0, y_0) \in \Omega$ с текущей точкой $M(x, y) \in \Omega$. Например, если $\Omega = R_2$ ($\Omega = R_3$), получаем особенно простые формулы:

$$u(M) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)dt + C \tag{2.38}$$

(на плоскости),

$$u(M) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C \tag{2.39}$$

(в пространстве).

Потенциальные поля обладают рядом замечательных свойств. Перечислим основные из них.

1. Криволинейный интеграл II рода от потенциального поля $\vec{F}(M)$ не зависит от формы кривой L_{AB}, соединяющей точки A и B, а зависит только от самих этих точек.

2. Циркуляция потенциального поля, заданного в односвязной области на плоскости (в поверхностно-односвязной области в пространстве), равна нулю.

Замечание 2.3. Понятия односвязной области на плоскости и в пространстве обсуждается в §§ 2.5, 2.7 главы 2.

2.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

Определение 2.9. Гладкой поверхностью в пространстве R_3 называется множество точек S, удовлетворяющее условиям:

1. $S = \{(x, y, z)\colon\ x = \varphi(u, v),\ \ y = \psi(u, v),\ \ z = \chi(u, v)\}$, $(u, v) \in D$ — замкнутое ограниченное множество на плоскости (u, v).

2. Функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные в D, т. е. $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v) \in C^1(D)$.

3. $$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} = 2,\ \ \forall (u, v) \in D,$$

где $\varphi_u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\varphi_v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$, ... и т. д.

Замечание 2.4. Определенную выше поверхность S можно записать в векторной форме:

$$\vec{r}(u, v) = (\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v)),\ (u, v) \in D \subset R_2.$$

Векторы

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u}\right) = (\varphi_u,\ \psi_u,\ \chi_u) \text{ и } \vec{r}_v = (\varphi_v,\ \psi_v,\ \chi_v)$$

являются касательными векторами к поверхности S в заданной точке $\in S$. Условие 3 определения имеет простой геометрический смысл: в каждой точке S ненулевые

векторы $\vec{r_u}$ и $\vec{r_v}$ не коллинеарны и, следовательно, в каждой точке S определен единичный вектор нормали

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|},$$

непрерывно изменяющийся на поверхности S. Очевидно, что вектор

$$\vec{n}^* = \frac{\vec{r_v} \times \vec{r_u}}{|\vec{r_v} \times \vec{r_u}|}$$

также будет непрерывным единичным нормальным вектором на S, но с противоположным направлением: $\vec{n}^* = -\vec{n}$. Говорят, что поверхность S ориентирована, если на ней выбрано непрерывное векторное поле единичных нормалей $\vec{n}$ или $\vec{n}^*$. Поскольку для поверхностей, указанных в определении, существуют две различные ориентации, то эти поверхности иногда называют двусторонними. В геометрии существуют и односторонние поверхности, но определение таких поверхностей существенно отличается от данного выше. В частности, эти поверхности нельзя задать параметрическими уравнениями из условия 1. В дальнейшем используются только двусторонние поверхности.

Условия 2, 3 могут нарушаться в некоторых точках поверхности S. Пусть всем таким точкам соответствует некоторое множество $\omega \in D$. Иными словами, если $(u, v) \in \omega$, то в точке поверхности $\vec{r}(u, v)$ нарушается хотя бы одно из условий 2, 3.

Обозначим жорданову меру множества ω, как это делалось в предыдущей главе, $\mu(\omega)$. Поверхность S называется кусочно-гладкой, если $\mu(\omega) = 0$. Наглядно кусочно-гладкую поверхность можно представить как составную поверхность из гладких поверхностей S_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, «склеенных» между собой вдоль кусочно-гладких кривых L_{ij}: $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $L_{ij} = S_i \cap S_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$.

В качестве простых примеров кусочно-гладких поверхностей можно указать конус $z^2 = x^2 + y^2$ (в точке $M(0, 0, 0)$ нарушается условие 2 или поверхность куба $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$ (условие 2) нарушено на ребрах и вершинах куба).

Пусть в области $\Omega \in R_3$ задано непрерывное скалярное поле $U(M) = U(x, y, z)$, гладкая поверхность $S \in \Omega$. Произведем разбиение поверхности S на частичные поверхности S_{ij} так же, как это делалось в главе 1 (§ 1.7, рис. 1.7, с заменой $\Omega \to S$, $K_{ij} \to S_{ij}$) и на каждой S_{ij} выберем произвольно точку M_{ij}. Обозначим диаметр этого разбиения d, а площадь частичной поверхности S_{ij} — $\mu(S_{ij})$. Составим интегральную сумму I_n:

$$I_n = \sum_{i,j} U(M_{ij})\mu(S_{ij}). \tag{2.40}$$

Определение 2.10. Если при $d \to 0$ существует не зависящий от способа разбиения S на частичные поверхности S_{ij} и выбора точек M_{ij} на них предел интегральных сумм (2.40), то он называется поверхностным интегралом I рода от скалярного поля $U(M)$ по поверхности S и обозначается

$$\lim_{d \to 0} I_n = \iint_S U(M)dS. \tag{2.41}$$

Можно выразить поверхностный интеграл I рода (2.41) через двойной интеграл Римана по переменным u, v. Действительно, элемент площади гладкой поверхности можно выразить через касательные векторы $\vec{r}_v$, $\vec{r}_u$ по формуле

$$dS = |\vec{r}_v \times \vec{r}_u|\,dudv = \sqrt{\begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}^2}\,dudv. \tag{2.42}$$

Подставляя (2.42) в (2.41), получаем искомое выражение:

$$\iint_S U(M)dS = \iint_D U(\varphi, \psi, \chi)\sqrt{\begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}^2}\,dudv. \tag{2.43}$$

Замечание 2.5. Если поверхность S удается задать явными уравнениями $z = f(x, y)$, $x = g(y, z)$ или $y = h(z, x)$, тогда формула (2.43) может быть соответствующим образом изменена. Пусть, например, S: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, $f(x, y) \in C^1(D)$. Чтобы привести этот случай к данному в начале этого параграфа определению гладкой поверхности,

достаточно заменить $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$. После этой замены формула (2.43) преобразуется в следующую (учитываем, что теперь $\varphi(u, v) = u$, $\psi(u, v) = v$, $\chi(u, v) = f(u, v)$):

$$\iint\limits_S U(M)dS = \iint\limits_D U(u, v, f(u, v))\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}\,du\,dv = \\ = \iint\limits_D U(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy. \tag{2.44}$$

Из (2.43) следует, во-первых, существование поверхностного интеграла (2.41) (поскольку подынтегральная функция в правой части (2.43) непрерывна), а, во-вторых, становится ясно, что поверхностный интеграл I рода наследует все свойства от двойного интеграла Римана, которые перечислены в главе 1, § 1.1.

Укажем здесь только основные из них.

1. Значение поверхностного интеграла I рода не зависит от ориентации поверхности S.

2. Линейность поверхностного интеграла I рода.

Если скалярное поле $U(M)$ представляет собой линейную комбинацию скалярных полей $U_1(M)$ и $U_2(M)$, т. е.

$$U(M) = C_1U_1(M) + C_2U_2(M),$$

где C_1, C_2 — константы, тогда

$$\iint\limits_S U(M)dS = C_1 \iint\limits_S U_1(M)dS + C_2 \iint\limits_S U_2(M)dS. \tag{2.45}$$

3. Аддитивность поверхностного интеграла I рода.

Пусть S — кусочно-гладкая поверхность, представимая в виде

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i,$$

где S_i — гладкие поверхности, тогда

$$\iint\limits_S U(M)dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_S U(M)dS. \tag{2.46}$$

В заключение этого параграфа приведем основные формулы, связанные с применениями поверхностного интеграла I рода.

1. Если в точках поверхности S скалярное поле $U(M)$ тождественно равно единице, тогда поверхностный инте-

грал от этого поля по S численно равен площади поверхности S, т. е.

$$\mu(S) = \iint\limits_S dS. \tag{2.47}$$

2. Если скалярное поле $U(M)$ представляет поверхностную плотность массы в точках $M \in S$, тогда поверхностный интеграл равен массе этой поверхности:

$$M(S) = \iint\limits_S U(M)dS. \tag{2.48}$$

3. Координаты центра тяжести поверхности S с поверхностной плотностью $U(M)$, $M \in S$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{M}\iint\limits_S \varphi \cdot U(\varphi, \psi, \chi)\cdot dS, \\ Y_C &= \frac{1}{M}\iint\limits_S \psi \cdot U(\varphi, \psi, \chi)\cdot dS, \\ Z_C &= \frac{1}{M}\iint\limits_S \chi \cdot U(\varphi, \psi, \chi)\cdot dS, \end{aligned} \tag{2.49}$$

где M — масса поверхности S.

Замечание 2.6. Если поверхность S задана в явном виде уравнениями $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, тогда формулы (2.49) имеют вид:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{M}\iint\limits_D x \cdot U(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy, \\ Y_C &= \frac{1}{M}\iint\limits_D y \cdot U(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy, \\ Z_C &= \frac{1}{M}\iint\limits_D z \cdot U(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy. \end{aligned} \tag{2.50}$$

2.4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Пусть в области $\Omega \in R_3$ задано непрерывное векторное поле $\vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$, и $S \subset \Omega$ — ориентированная гладкая поверхность. Так же, как и в предыдущем параграфе, произведем разбиение S на частичные поверхности S_{ij} и на

каждой S_{ij} выберем произвольно точку $M_{ij} \in S_{ij}$. Диаметр этого разбиения обозначим d.

Составим интегральную сумму I_n:

$$J_n = \sum_{i,j} \vec{F}(M_{ij}) \cdot \vec{n}(M_{ij}) \cdot \mu(S_{ij}). \qquad (2.51)$$

Определение 2.11. Если при $d \to 0$ существует предел интегральных сумм (2.51), не зависящий от разбиения ориентированной гладкой поверхности

$$S = \bigcup_{i,j} S_{ij}$$

и выбора точек $M_{ij} \in S_{ij}$, то он называется поверхностным интегралом II рода от векторного поля $\vec{F}(M)$ по ориентированной поверхности S и обозначается

$$\lim_{d \to 0} J_n = \iint_S \vec{F}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS. \qquad (2.52)$$

Замечание 2.7. На первый взгляд может показаться, что поверхностный интеграл II рода (2.52) ничем не отличается от поверхностного интеграла I рода (2.41). Действительно, и в том, и в другом случае под знаком интеграла элемент площади поверхности dS умножается на некоторую непрерывную скалярную функцию точки $M \in S$. Тем не менее именно в этой функции и скрывается принципиальное различие этих интегралов. В случае поверхностного интеграла I рода (2.41) подынтегральная функция является скалярным полем, существующим независимо от выбора поверхности S. В интеграле (2.52), напротив, подынтегральная функция вообще не является скалярным полем и ее значения определяются выбором поверхности S и ее ориентацией.

Поверхностный интеграл II рода (2.52) можно выразить через двойной интеграл по переменным u, v, с помощью которых задается ориентированная поверхность S.

В точках поверхности S векторное поле $\vec{F}(M)$ равно

$$\vec{F}(M) = (P(\varphi, \psi, \chi),\ Q(\varphi, \psi, \chi),\ R(\varphi, \psi, \chi)), \qquad (2.53)$$

где $M(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \in S$, $(u, v) \in D$.

Ориентацию поверхности S зададим выбором непрерывного поля нормали $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{1}{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}\left(\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u\\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix}\right). \quad (2.54)$$

Учтем также элемент площади из (2.42) и получим

$$\iint_S \vec{F}(M)\cdot\vec{n}\cdot dS = \iint_D (\vec{F}(M),\ \vec{r}_u(M),\ \vec{r}_v(M))dudv =$$

$$= \iint_D \left(P(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix} + Q(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u\\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix} + R(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix} \right) dudv. \quad (2.55)$$

Перечислим основные свойства поверхностного интеграла II рода.

1. При изменении ориентации поверхности S поверхностный интеграл II рода изменяет знак.

2. Линейность.

Если векторное поле $\vec{F}(M)$ есть линейная комбинация векторных полей

$$\vec{F}_1(M),\ \vec{F}_2(M),\ \text{т.е. } \vec{F}(M) = C_1\vec{F}_1(M) + C_2\vec{F}_2(M),$$

то

$$\iint_S \vec{F}(M)\cdot\vec{n}\cdot dS = C_1\iint_S \vec{F}_1(M)\cdot\vec{n}\cdot dS + C_2\iint_S \vec{F}_2(M)\cdot\vec{n}\cdot dS. \quad (2.56)$$

3. Аддитивность.

Если $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, где S_i — гладкие ориентированные поверхности, тогда

$$\iint_S \vec{F}(M)\cdot\vec{n}\cdot dS = \sum_{i=1}^{k}\iint_{S_i}\vec{F}(M)\cdot\vec{n}\cdot dS. \quad (2.57)$$

Замечание 2.8. Свойство 3 позволяет распространить понятие поверхностного интеграла II рода на кусочно-гладкие поверхности. Действительно, кусочно-гладкую

поверхность S можно представить как объединение гладких поверхностей S_i, которые соприкасаются вдоль кусочно-гладких кривых $L_{ij} = S_i \cap S_j$ ($i = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$). Каждая гладкая составляющая S_i может быть ориентирована самостоятельно и прежде всего возникает вопрос о совместной ориентации всей поверхности S. Покажем, как эта задача решается для смежных составляющих S_i и S_j. Ориентируем составляющую S_i выбором нормали $\vec{n}_i$. Затем произвольно ориентируем кривую $L_{ij} = S_i \cap S_j$. Допустим, что наблюдаемое с конца $\vec{n}_i$ движение по L_{ij} происходит против часовой стрелки, тогда на S_j выбираем нормаль $\vec{n}_j$ таким образом, чтобы наблюдаемое с ее конца движение по L_{ij} происходило п р о т и в о п о л о ж н о м н а п р а в л е н и и, т. е. в нашем случае по часовой стрелке. Затем по цепочке происходит ориентация всей составной поверхности

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i.$$

Рассмотрим более подробно правую часть формулы (2.55). Прежде всего запишем ее в виде суммы трех интегралов:

$$\iint\limits_S \vec{F}(M)\cdot\vec{n}\cdot dS = \iint\limits_D P(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix} du dv + \\ + \iint\limits_D Q(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u\\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix} du dv + \iint\limits_D R(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix} du dv. \qquad (2.58)$$

Рассмотрим, например, первый интеграл правой части (2.58) (остальные рассматриваются аналогично). Поскольку $\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix} = \dfrac{D(\psi,\chi)}{D(u,v)} = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$ — якобиан преобразования $y = \psi(u, v)$; $z = \chi(u, v)$ (предположим сначала для простоты, что это преобразование взаимно однозначно), то этот интеграл согласно формуле (1.36) главы 1, § 1.1.7 равен

$$\iint\limits_D P(\varphi,\psi,\chi)\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix} du dv = \pm \iint\limits_{S_{YOZ}} P(x,y,z)\,dy dz. \qquad (2.59)$$

S_{YOZ} — проекция на плоскость YOZ той части поверхности S, которая может быть представлена явным уравне-

нием $x = h(y, z)$. Если нормаль $\vec{n}$ к данной части S образует острый угол с осью OX, выбирается знак «+», в противном случае — знак «−». В некоторых случаях несколько частей S имеют одну и ту же проекцию S_{YOZ} («многослойная» проекция). Каждая такая часть может быть представлена явным уравнением $x_i = h_i(y, z)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и формула (2.59) при этом преобразуется:

$$\iint\limits_D P(\varphi, \psi, \chi)\begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} du dv = \sum_{i=1}^{k} \pm \iint\limits_{S_{YOZ}} P(h_i(y,z), y, z)\, dy dz. \quad (2.60)$$

В частности, «многослойные» проекции возникают при рассмотрении замкнутых поверхностей, т. е. поверхностей без краевых точек. Простым примером замкнутой поверхности является сфера: $x = a\sin v \cos u$, $y = a \sin v \sin u$, $z = a \cos v$, $v \in [0, \pi]$, $u \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. В случае сферы получаем «двухслойную» проекцию S_{YOZ}: $y^2 + z^2 \leqslant a^2$ и две явные функции $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ (внешняя нормаль $\vec{n}$ образует острый угол с OX) и в формуле (2.60) выбирается знак «+», $x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ (внешняя нормаль $\vec{n}$ образует тупой угол с OX) и в формуле (2.60) выбирается знак «−».

Учитывая все сказанное выше, поверхностный интеграл II рода часто записывают в виде

$$\iint\limits_S \vec{F}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint\limits_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (2.61)$$

В физике поверхностный интеграл II рода называют потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S. Если, например, $\vec{F}(M)$ является векторным полем скоростей некоторого вещества, а S — замкнутая поверхность с внешней нормалью $\vec{n}$, то поверхностный интеграл II рода поля скоростей через S будет равен изменению количества вещества в области $\Omega \subset R_3$, охватываемой поверхностью S, происходящем за единицу времени.

Определение 2.12. Векторное поле $\vec{F}$, определенное в области $\Omega \subset R_3$, называется соленоидальным, если $\forall M \in \Omega \operatorname{div} \vec{F} = 0$.

Соленоидальное поле может быть представлено в виде ротора некоторого векторного поля $\vec{W}(M) = \vec{W}(x, y, z)$, называемого векторным потенциалом поля $\vec{F}(M)$, т. е.

$$\vec{F}(M) = \operatorname{rot}\vec{W}(M). \qquad (2.62)$$

Для данного соленоидального поля $\vec{F}(M)$ существует бесконечно много векторных потенциалов. Действительно, если $\vec{W}_1$ и $\vec{W}_2$ — векторные потенциалы поля $\vec{F}$, тогда

$$\operatorname{rot}\vec{W}_1 = \operatorname{rot}\vec{W}_2 = \vec{F},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{rot}(\vec{W}_1 - \vec{W}_2) = \vec{0}.$$

Согласно определению из § 2.2 поле $\vec{W}_1 - \vec{W}_2$ является потенциальным и поэтому существует некоторое скалярное поле $U(M)$, для которого

$$\vec{W}_1 - \vec{W}_2 = \operatorname{grad}U(M).$$

В связи с этим говорят, что векторный потенциал соленоидального поля $\vec{F}$ определяется с точностью до градиента некоторого скалярного поля.

В примере 2.26 § 2.9 показано, как векторный потенциал определяется на практике.

Соленоидальные поля, заданные в объемно-односвязной области $\Omega \subset R_3$ (см. § 2.6), обладают рядом замечательных свойств, в частности, поток через любую замкнутую поверхность таких полей равен нулю.

2.5. ФОРМУЛА ГРИНА

Напомним, что область Ω (на плоскости или в пространстве) называется с в я з н о й, если любые две точки ее могут быть соединены непрерывной кривой, принадлежащей этой области.

Определение 2.13. Связная область $\Omega \subset R_2$ называется n-связной, если ее граница $\partial\Omega$ состоит из n простых контуров L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} L_i,$$

где L_i — простые контуры $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем говорить, что контур L_i ориентирован положительно относительно

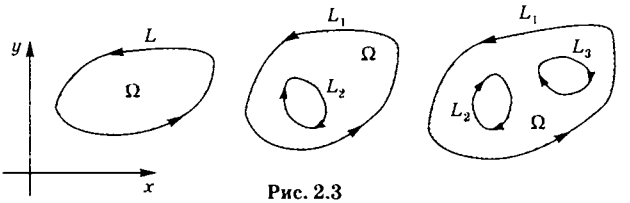

Рис. 2.3

области Ω, если при его обходе область Ω остается слева. В этом случае также говорят, что ориентация контуров L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ согласована. На рис. 2.3 схематично показаны односвязная, двухсвязная и трехсвязная области с согласованной положительной ориентацией относительно Ω.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2 (формула Грина). Пусть векторное поле $\vec{F}(x, y) = (P(x, y),\ Q(x, y))$ непрерывно дифференцируемо в замкнутой n-связной области $\bar{\Omega} \subset R_2$ и $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — простые контуры, ориентированные положительно относительно области Ω, тогда справедлива общая формула Грина для n-связной области:

$$\int\limits_{\partial\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{2.63}$$

В частности, если Ω — о д н о с в я з н а я область и $L = \partial\Omega$ — граничный контур, ориентированный положительно относительно Ω, тогда имеет место формула Грина для односвязной области:

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{2.64}$$

В качестве простого применения формулы Грина (2.64) получим формулу для площади области Ω. Рассмотрим векторное поле $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, которое, очевидно, является непрерывно-дифференцируемым в любой односвязной области Ω с граничным контуром $L = \partial\Omega$, ориентированным положительно. Поскольку в данном случае $P = -y$, $Q = x$, то по формуле (2.64) находим

$$\oint_L -y\,dx + x\,dy = 2\iint_\Omega dx\,dy. \tag{2.65}$$

Правая часть (2.65) равна удвоенной площади области Ω. Окончательно получаем

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\oint_L -y\,dx + x\,dy. \tag{2.66}$$

В § 2.2 было введено понятие потенциального поля $\vec{F} = (P, Q)$ в односвязной области Ω как такого поля, для которого в каждой точке $M \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{2.67}$$

Для такого поля циркуляция по любому контуру, принадлежащему области Ω, будет равна нулю в силу формулы Грина (2.64).

Требование односвязности области Ω существенно и не может быть устранено, как показывает следующий пример.

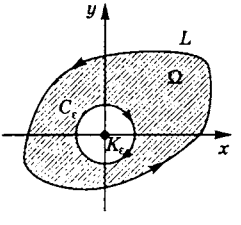

Рис. 2.4

Пусть

$$\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \ \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Как нетрудно проверить, для этого поля равенство (2.67) выполнено при $x^2 + y^2 \neq 0$. После удаления круга K_ε $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$ малого радиуса ε (рис. 2.4) получаем двухсвязную область $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus K_\varepsilon$ с границей $\partial\Omega = L \cup C_\varepsilon$.

Учитывая равенство (2.67) и формулу Грина (2.64), получаем

$$\oint_L \vec{F} \cdot \vec{dl} + \oint_{C_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$$

или

$$\oint_L \vec{F} \cdot \vec{dl} = \oint_{C_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{dl},$$

т. е. циркуляция поля $\vec{F}$ не зависит от выбора контура. Рассчитаем циркуляцию по окружности C_ε: $x = \varepsilon \cos\varphi$, $y = \varepsilon \sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} -\frac{\varepsilon\sin\varphi d(\varepsilon\cos\varphi)}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon\cos\varphi d(\varepsilon\sin\varphi)}{\varepsilon^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Итак, в данном случае, если область Ω содержит начало координат, то циркуляция поля $\vec{F}$ вдоль любого контура L, охватывающего начало координат, равна 2π.

Поле $\vec{F} = (P, Q)$, для которого в каждой точке Ω выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, называется безвихревым полем на плоскости. Предыдущий пример показывает, что безвихревое поле на плоскости потенциально только в односвязной области $\Omega \subset R$.

2.6. ФОРМУЛА ГАУССА–ОСТРОГРАДСКОГО

Определение 2.14. Связная область трехмерного пространства $\Omega \subset R_3$ называется объемно n-связанной, если ее граница $\partial\Omega$ состоит из n кусочно-гладких замкнутых поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — кусочно-гладкие замкнутые поверхности, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем говорить, что ориентация этих поверхностей согласована, если на каждой из них выбрана внешняя по отношению к Ω нормаль $\vec{n}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3 (формула Гаусса–Остроградского). Пусть векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ непрерывно-дифференцируемо в замкнутой объемно n-связанной области $\Omega \subset R_3$ и $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — кусочно-гладкие замкнутые поверхности с согласованной ориентацией, тогда справедлива общая формула Гаусса–Остроградского для объемно n-связанной области.

$$\iint_{\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} S_i} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}\cdot dxdydz. \qquad (2.68)$$

В частности, если $\Omega \subset R_3$ — объемно-односвязная область и $S = \partial\Omega$ — граничная поверхность, ориентированная по внешней к S нормали, тогда имеет место формула Гаусса–Остроградского для объемно-односвязной области Ω:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F} \cdot dxdydz. \tag{2.69}$$

В качестве примера получим формулу для вычисления объема односвязной области Ω.

Рассмотрим поле $\vec{F} = (x, y, z)$ с $\operatorname{div}\vec{F} = 3$, заданное в некоторой объемно-односвязной области $\Omega \subset R_3$ с граничной поверхностью S, ориентированной по внешней нормали. Учитывая (2.61) и (2.69), получим

$$\mu(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \\ = \frac{1}{3}\left(\oiint_S x dxdz + y dzdx + z dxdy \right). \tag{2.70}$$

Другой важный пример получим, рассматривая соленоидальное поле $\vec{F}(x, y, z)$, заданное в объемно-односвязной области Ω. В этом случае по определению

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

и, следовательно, по формуле (2.69) поток поля $\vec{F}$ через граничную поверхность S обратится в нуль:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0. \tag{2.71}$$

Если область Ω не объемно-односвязная, то поток соленоидального поля через замкнутую поверхность в общем случае будет отличен от нуля (см. пример 2.28 § 2.9).

С помощью формулы (2.69) можно получить инвариантные представления (т. е. представления, не зависящие от выбора координатной системы) градиента скалярного поля $U(M)$, дивергенции и ротора векторного поля $\vec{F}(M)$.

Пусть $d(\Omega)$ — диаметр объемно-односвязной области $\Omega \subset R_3$ и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Справедливы следующие формулы:

$$\operatorname{grad}U(M_0)=\lim_{\substack{d(\Omega)\to 0\\ M_0\in\Omega}}\frac{\oiint_S U(M)\vec{n}dS}{\mu(\Omega)}, \tag{2.72}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_0)=\lim_{\substack{d(\Omega)\to 0\\ M_0\in\Omega}}\frac{\oiint_S \vec{F}(M)\cdot\vec{n}dS}{\mu(\Omega)}, \tag{2.73}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M_0)=\lim_{\substack{d(\Omega)\to 0\\ M_0\in\Omega}}\frac{\oiint_S (\vec{n}\times\vec{F})dS}{\mu(\Omega)}. \tag{2.74}$$

В формулах (2.72)–(2.74) S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область Ω.

2.7. ФОРМУЛА СТОКСА

Определение 2.15. Связная область $\Omega\subset R_3$ называется поверхностно-односвязной, если для любого контура $L\subset\Omega$ найдется кусочно-гладкая поверхность $S\subset\Omega$, для которой контур L является граничным.

В дальнейшем будем говорить, что ориентация поверхности S и ограничивающего ее контура L согласованы, если движение по контуру наблюдается с конца нормали $\vec{n}$ к S против часовой стрелки.

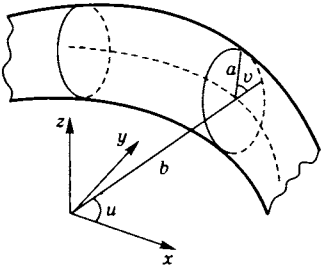

Рис. 2.5

Замечание 2.9. Не следует путать понятия объемно-односвязной области Ω и поверхностно-односвязной области. Например, область Ω, ограниченная поверхностью тора: $x=(b+a\cos v)\cos u$, $y=(b+a\cos v)\sin u$, $z=a\sin v$, $u, v\in[0, 2\pi]$, $b>a>0$ (рис. 2.5), является объемно-односвязной, но не является поверхностно-односвязной. Действительно, контур L: $x=b\cos u$, $y=b\sin u$, $z=0$ невозможно «стянуть» поверхностью S, принадлежащей рассматриваемой области.

Теорема 2.4 (формула Стокса). Пусть в поверхностно-односвязной области $\Omega \subset R_3$ задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{F}(M)$. Простой контур $L \subset \Omega$ ограничивает кусочно-гладкую поверхность $S \subset \Omega$, при этом ориентации S и L согласованы. Справедлива следующая формула Стокса:

$$\oint_L \vec{F}(M)d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}(M)\cdot\vec{n}dS. \qquad (2.75)$$

Запишем формулу Стокса (2.75) в координатной форме. Пусть $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$, тогда

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (2.76)$$

Если поле $\vec{F}(M)$, заданное в поверхностно-односвязной области Ω, б е з в и х р е в о е, т. е. $\operatorname{rot}\vec{F}(M) = \vec{0}\ \ \forall M \in \Omega$, тогда циркуляция этого поля по любому простому контуру $L \subset \Omega$ равна нулю. Действительно, при сделанных предположениях правая часть (2.75) обращается в нуль, следовательно,

$$\oint_L \vec{F}(M)d\vec{l} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Требование поверхностной односвязности области Ω существенно и не может быть устранено. Рассмотрим тор из *замечания 2.9* этого параграфа, контур L: $x = b\cos u$, $y = b\sin u$, $z = 0$ и поле

$$\vec{F}(M) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right).$$

Очевидно, что поле $\vec{F}$ безвихревое $(\operatorname{rot}\vec{F}(M) = \vec{0})$, но циркуляция поля по контуру L равна 2π.

Таким образом, безвихревое векторное поле $\vec{F}(M)$ потенциально т о л ь к о в п о в е р х н о с т н о - о д н о с в я з н о й о б л а с т и $\Omega \subset R_3$.

2.8. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ДЕКАРТОВЫХ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

1. Градиент скалярного поля $U(M)$, $M \in \Omega \subset R_3$.

Декартовые прямоугольные координаты:

$$\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\operatorname{grad} U(M) \equiv \nabla U(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (2.77)$$

Цилиндрические координаты:

$$\vec{r}(M) = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}.$$

Локальный ортогональный базис:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}, \\ \vec{e}_z &= \vec{k}, \end{aligned} \qquad (2.78)$$

$$\operatorname{grad} U(M) \equiv \nabla U(M) = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z. \qquad (2.79)$$

Сферические координаты:

$$\vec{r}(M) = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}.$$

Локальный ортогональный базис:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}, \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}, \end{aligned} \qquad (2.80)$$

$$\operatorname{grad} U(M) \equiv \nabla U(M) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \qquad (2.81)$$

2. Дивергенция векторного поля $\vec{F}(M)$, $M \in \Omega \subset R_3$.

Декартовые прямоугольные координаты:

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) \equiv \nabla \cdot \vec{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (2.82)$$

Цилиндрические координаты:

$$\vec{F}(M) = F_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + F_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + F_z(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z,$$

где F_ρ, F_φ, F_z — координаты векторного поля $\vec{F}(M)$ в локальном ортогональном базисе $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ (см. формулу (2.78)).

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) \equiv \nabla \cdot \vec{F}(M) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (2.83)$$

Сферические координаты:

$$\vec{F}(M) = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi,$$

где F_r, F_θ, F_φ — координаты векторного поля $\vec{F}(M)$ в локальном ортогональном базисе $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ (см. формулу (2.80)).

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) \equiv \nabla \cdot \vec{F}(M) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \cdot F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta \cdot F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2.84)$$

3. Ротор (вихрь) векторного поля $\vec{F}(M)$, $M \in \Omega \subset R_3$.

Декартовые прямоугольные координаты:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M) \equiv \nabla \times \vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \quad (2.85)$$

Цилиндрические координаты:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M) \equiv \nabla \times \vec{F}(M) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z. \quad (2.86)$$

Сферические координаты:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M)\equiv\nabla\times\vec{F}(M)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta F_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+ \tag{2.87}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi.$$

4. Оператор Лапласа скалярного поля $U(M)$.

Декартовые прямоугольные координаты:

$$\Delta U(M)\equiv\operatorname{div}\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}. \tag{2.88}$$

Цилиндрические координаты:

$$\Delta U(M)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}. \tag{2.89}$$

Сферические координаты:

$$\Delta U(M)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}. \tag{2.90}$$

2.9. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ К ГЛАВЕ 2

Задачи на вычисление криволинейных интегралов I рода.

2.1. Вычислить интеграл

$$\int_{AB}\frac{dl}{\sqrt{|x|+|y|}}$$

по отрезку, соединяющему точки $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

Решение. Отрезок, соединяющий точки A и B, можно представить параметрическими уравнениями $x=4t$, $y=-2+2t$, $t\in[0,1]$. Следовательно,

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{16+4}dt=2\sqrt{5}dt,$$

и искомый криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу:

$$\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{|x|+|y|}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{4t+2-2t}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{5}{2}}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t+1}}=\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{t+1}\Big|_{0}^{1}=2\left(\sqrt{20}-\sqrt{10}\right).$$

2.2. Найти длину дуги AB кривой $e^{2y}(e^{2x}-1)=e^{2x}+1$, если $x_A=1$, $x_B=2$.

Р е ш е н и е. Длина дуги гладкой кривой вычисляется с помощью криволинейного интеграла I рода с подынтегральной функцией $f(x, y)=1$. Найдем прежде всего явное уравнение данной кривой:

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

С помощью этой формулы сводим криволинейный интеграл к определенному:

$$\int\limits_{AB}dl=\int\limits_{1}^{2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\sqrt{1+\frac{4e^{4x}}{(e^{4x}-1)^2}}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx=$$

$$=\int\limits_{1}^{2}\left(1+\frac{2}{e^{4x}-1}\right)dx=1+2\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{e^{4x}-1}=1+\frac{1}{2}\int\limits_{e^4-1}^{e^8-1}\frac{dt}{t(t+1)}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\int\limits_{e^4-1}^{e^8-1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\limits_{e^4-1}^{e^8-1}\frac{dt}{t+1}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{t}{t+1}\Big|_{e^4-1}^{e^8-1}=\frac{1}{2}\ln(1+e^4)-1.$$

2.3. Найти центр тяжести дуги AB:

а) AB: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроида), $A(0, a)$, $B(a, 0)$, линейная плотность в каждой точке дуги равна ее абсциссе;

б) AB: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\frac{H}{2\pi}t$, $t_A=0$, $t_B=2\pi$ (винтовая линия с шагом H), $\rho(x, y)=1$.

Р е ш е н и е.

а) Сначала найдем массу линии AB с помощью криволинейного интеграла I рода, учитывая, что $P(x, y)=x$. По условию задачи

$$M_{AB} = \int\limits_{AB} p(x,y)dl,$$

$$M_{AB} = \int\limits_{AB} x dl = \int\limits_0^a x \cdot \sqrt{1+(y')^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a x \cdot \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = a^{1/3} \int\limits_0^a x^{2/3} dx = \frac{3}{5}a^2.$$

Теперь найдем координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{1}{M_{AB}} \int\limits_{AB} x \cdot p(x,y)dl,$$

$$y_c = \frac{1}{M_{AB}} \int\limits_{AB} y \cdot p(x,y)dl.$$

Подставляем заданную плотность $p(x, y) = x$ и проводим интегрирование:

$$x_c = \frac{1}{M_{AB}} \int\limits_0^a x^2 \cdot \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{5}{a^2} \int\limits_0^a a^{1/3} x^{5/3} dx = \frac{5}{8}a,$$

$$y_c = \frac{1}{M_{AB}} \int\limits_{AB} xy \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Для нахождения ординаты центра тяжести y_c удобно представить астроиду параметрическими уравнениями: $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Получаем

$$y_c = \frac{1}{M_{AB}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^3\varphi \sin^3\varphi \sqrt{(3a\cos^2\varphi\sin\varphi)^2 + (3a\sin^2\varphi\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 5a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \sin^4\varphi d\varphi = \frac{5a}{32} \int\limits_0^{\pi} \sin^4 t\,dt.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, используем известные свойства тригонометрических функций. Во-первых, нетрудно понять, что

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^4 t\,dt = \int\limits_0^{\pi} \cos^4 t\,dt.$$

Во-вторых, из основного тригонометрического тождества и формулы понижения степени следует:

$$\pi = \int_0^{\pi} dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin^4 t dt + \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4t}{4} dt = 2\int_0^{\pi} \sin^4 t dt + \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{8}.$$

Ордината центра тяжести астроиды равна

$$y_c = \frac{5\pi a}{128}.$$

б) Поскольку винтовая линия однородна и $p(x, y) = 1$, то координаты ее центра тяжести рассчитываются по формулам:

$$x_c = \int_{AB} x dl, \quad y_c = \int_{AB} y dl, \quad z_c = \int_{AB} z dl,$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{1 + \frac{H^2}{4\pi^2}} dt.$$

Учитываем данную параметризацию винтовой линии и сводим криволинейные интегралы I рода к определенным интегралам:

$$x_c = \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{1 + \frac{H^2}{4\pi^2}} dt = 0,$$

$$y_c = \int_0^{2\pi} \sin t \sqrt{1 + \frac{H^2}{4\pi^2}} dt = 0,$$

$$z_c = \int_0^{2\pi} \frac{H}{2\pi} t \sqrt{1 + \frac{H^2}{4\pi^2}} dt = H\pi \sqrt{1 + \frac{H^2}{4\pi^2}}.$$

Вычисление криволинейных интегралов II рода.

2.4. Вычислить криволинейные интегралы II рода $\int_L P dx + Q dy$, если:

а) $P = y(x - y)$; $Q = x$; L: $y = 2x$, $x \in [0, 1]$;

б) $P = (x^2 - y)$; $Q = 0$; L — периметр прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$, обходимого по часовой стрелке;

в) $P = 2x(y - 1)$; $Q = x^2$; L — контур фигуры, образованной линиями $y = x^2$, $y = 9$ (при обходе контура фигура остается слева).

Р е ш е н и е.

а) Подстановкой $y = 2x$, $dy = 2dx$ криволинейный интеграл по заданному отрезку сводится к определенному интегралу:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_0^1 (2x(x - 2x)dx + x2dx) =$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

б) Контур показан на рис. 2.6. На отрезках OA и BC $dx = 0$, поэтому остаются только отрезки AB и CO.

$$\int_{OABC} (x^2 - y)dx = \int_{AB} (x^2 - y)dx + \int_{CO} (x^2 - y)dx = \int_0^1 (x^2 - 2)dx +$$

$$+ \int_1^0 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{3} = -2.$$

в) Контур, ограничивающий фигуру, показан на рис. 2.7.
На кривой BOA $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $x \in [-3, 3]$.
На отрезке AB $y = 9$, $dy = 0$, $x \in (-3, 3)$.

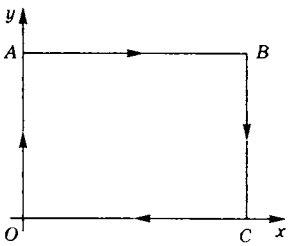

Рис. 2.6

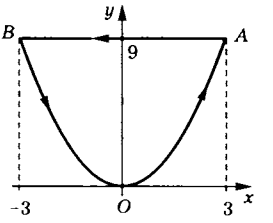

Рис. 2.7

Используем аддитивность криволинейного интеграла, получаем

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{BOAB} (2x(y-1)dx + x^2dy) =$$

$$= \int\limits_{BOA} (2x(y-1)dx + x^2dy) + \int\limits_{AB} (2x(y-1)dx + x^2dy) =$$

$$= \int\limits_3^3 (2x(x^2-1)dx + 2x^3dx) + \int\limits_{-3}^3 2x(9-1)dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^3 (4x^3 - 2x)dx + 16\int\limits_{-3}^3 x\,dx = (x^4 - x^2)\Big|_{-3}^3 + 8x^2\Big|_{-3}^3 = 0.$$

2.5. Вычислить указанные криволинейные интегралы II рода:

а) $\int\limits_L 2y\sin 2x\,dx - \cos 2x\,dy$, где L — любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $A\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

б) $\int\limits_L yxe^x dx - (x-1)e^x dy$, где L — любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $A(0, 2)$ и $B(1, 2)$.

Р е ш е н и е.

а) Несложно понять, что подынтегральная функция является полным дифференциалом функции $u = -y\cos 2x$, т. е.

$$\int\limits_L 2y\sin 2x\,dx - \cos 2x\,dy = \int\limits_L du = u(B) - u(A) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + 2\cos\pi = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

б) В этой задаче в качестве функции u можно взять функцию $u = y(x-1)e^x$: $du = yxe^x dx - (x-1)e^x dy$. Таким образом,

$$\int\limits_L yxe^x dx - (x-1)e^x dy = \int\limits_L du = u(B) - u(A) = 0.$$

2.6. Найти площадь фигуры, ограниченной заданной линией:

а) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ (кардиоида);

б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$ (астроида);

в) $y^2 = x^2 + x^3$.

Р е ш е н и е. Площади фигур Ω, ограниченных замкнутыми кусочно-гладкими линиями L без самопересечений, могут быть рассчитаны по формуле (2.65):

$$\mu(\Omega) = \oint_L -y\,dx + x\,dy,$$

где контур L обходится против часовой стрелки.

а) В случае кардиоиды $t \in [0, 2\pi]$, $dx = (-2\sin t + 2\sin 2t)dt$, $dy = (2\cos t - 2\cos 2t)dt$. Искомая площадь равна

$$\oint_L -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} [(2\cos t - 2\cos 2t)(2\cos t - \cos 2t) +$$

$$+ (2\sin t - 2\sin 2t)(2\sin t - \sin 2t)]dt = \int_0^{2\pi} (6 - 6\cos t)dt = 12\pi.$$

б) В случае астроиды $t \in [0, 2\pi]$, $dx = -3a\cos^2 t \sin t\,dt$, $dy = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$. Площадь, ограниченная астроидой, равна

$$\oint_L -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} (3a^2\cos^2 t\sin^4 t + 3a^2\cos^4 t\sin^2 t)dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3a^2}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{4}.$$

в) Прежде всего найдем параметрическое представление кривой $y^2 = x^2 + x^3$. Для этого положим $y = tx$, где t — параметр. После подстановки и сокращения на x^2 получаем:

$$x = t^2 - 1,$$
$$y = tx = t^3 - t.$$

Кривая показана на рис. 2.8. Замкнутая петля обходится против часовой стрелки, когда параметр t возрастает от -1 до $+1$. Рассчитаем площадь области, ограниченной этой петлей.

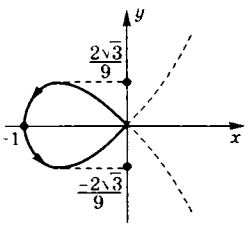

Рис. 2.8

$$\mu(\Omega) = \oint_L -ydx + xdy = \int_1^1 (2(t^3 - t)t + (t^2 - 1)(3t^2 - 1))dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^2 dt = 2\int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1)^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{16}{15}.$$

2.7. Напряженность электрического поля в каждой точке пространства направлена к началу координат, а ее величина пропорциональна расстоянию точки до начала координат. Определить изменения энергии заряженной частицы при ее перемещении из $A(0, 0, 0)$ в $B(1, 1, 1)$. Заряд частицы равен Q. Коэффициент пропорциональности поля принять равным 1.

Р е ш е н и е. По условию задачи в каждой точке пространства R_3 задан вектор $\vec{A} = (P, Q, R) = (-x, -y, -z)$.

Изменение энергии частицы равно работе поля при перемещении из A в B с обратным знаком. Работу поля рассчитаем с помощью криволинейного интеграла II рода:

$$\Delta E = -q \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = q \int_{AB} xdx + ydy + zdz =$$

$$= \frac{q}{2} \int_{AB} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{q}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} = \frac{3q}{2}.$$

Данное поле имеет потенциал $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, поэтому изменение энергии не зависит от вида кривой, соединяющей точки A и B.

Задачи на определение функции по ее полному дифференциалу.

2.8. Проверить, что дифференциальное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ и определить ее:

а) $(3x^2y + 1)dx + (x^3 - 1)dy$;

б) $y^2e^{xy}dx + e^{xy}(1 + xy)dy$.

Р е ш е н и е.

а) В данном случае $P = 3x^2y + 1$, $Q = x^3 - 1$. Как известно (§ 2.5), дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, если $Q_x = P_y$. Проверим это условие:

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 1) = 3x^2,$$

$$P_y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 1) = 3x^2.$$

Условие выполнено. Искомую функцию $u(x, y)$ определим с помощью криволинейного интеграла II рода, причем в качестве линии L выбираем ломанную, соединяющую точки $O(0, 0)$; $A(x, 0)$; $B(x, y)$:

$$u(x,y) = \int\limits_{OAB} (3x^2y + 1)dx + (x^3 - 1)dy + C =$$

$$= \int\limits_{OA} (3x^2y + 1)dx + \int\limits_{AB} (x^3 - 1)dy + C.$$

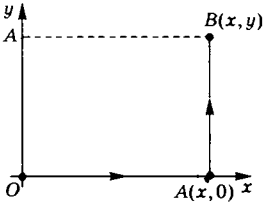

Рис. 2.9

На отрезке OA $y = 0$ и $dy = 0$, на отрезке AB $dx = 0$ (рис. 2.9). Окончательно получаем:

$$u(x, y) = \int\limits_0^x dt + \int\limits_0^y (x^3 - 1)dt + C = x + (x^3 - 1)y + C.$$

б) Проверим условие потенциальности поля $\vec{A} = (P, Q) = (y^2e^{xy}, e^{xy}(1 + xy))$:

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}(1 + xy)) = ye^{xy}(1 + xy) + ye^{xy} = ye^{xy}(2 + yx),$$

$$P_y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{xy}) = 2ye^{xy} + y^2xe^{xy} = ye^{xy}(2 + xy).$$

Как и в случае а), для определения искомого потенциала $u(x, y)$ вычислим работу поля на ломаной линии, соединяющей точки $O(0, 0)$; $A(x, 0)$; $B(x, y)$:

$$u(x,y)=\int\limits_{OA} y^2e^{xy}dx+\int\limits_{AB} e^{xy}(1+xy)dy+C=$$

$$=\int\limits_0^y e^{xt}(1+xt)dt+C=\frac{1}{x}\int\limits_0^{xy} e^{\tau}(1+\tau)d\tau+C=\frac{1}{x}(e^{\tau}(1+\tau)-e^{\tau})\Big|_0^{xy}+$$

$$+C=\frac{1}{x}(e^{xy}(1+xy)-e^{xy})+C=ye^{xy}+C.$$

2.9. Решить вопрос задачи 8 для дифференциальных выражений:

а) $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$; б) $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$.

Р е ш е н и е.

а) Непосредственно убеждаемся, что

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right),$$

где

$$\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ x>0,\ y\geqslant 0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ x<0,\\ 2\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ x>0,\ y<0.\end{cases}$$

Функция $\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ разрывная при $x>0$, $y=0$. Действительно,

$$\lim_{\substack{x>0\\ y\to 0+0}}\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}=0;\quad \lim_{\substack{x>0\\ y\to 0-0}}\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}=2\pi.$$

Таким образом, $u(x,y)=\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}+C$ для всех точек $(x,y)\in R_2$, кроме точек неотрицательной полуоси OX (в этом случае говорят, что потенциал определен на плоскости, разрезанной по неотрицательной полуоси OX).

б) В плоскости R_2, разрезанной по прямой $x+y=0$ (т. е. с удаленными точками $(x,-x)$, $x\in R$), условие потенциальности выполнено $Q_x=P_y$. Определим две функции $u_1(x,y)$ (для полуплоскости $x+y<0$) и $u_2(x,y)$ (для полуплоскости $x+y>0$), удовлетворяющие условиям

$$du_1 = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}:\ x+y<0,$$

$$du_2 = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}:\ x+y>0,$$

$$u_1(x,y) = \int\limits_{ABC} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2},$$

где ABC — ломаная линия, соединяющая точки $A(0,-1)$; $B(x,-1)$ и $C(x,y)$: $x+y<0$:

$$u_2(x,y) = \int\limits_{A_1B_1C_1} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2},$$

где $A_1B_1C_1$ — ломаная линия, соединяющая точки $A_1(0,1)$; $B_1(x,1)$ и $C_1(x,y)$: $x+y>0$.

Проведем соответствующие расчеты:

$$u_1(x,y) = \int\limits_{AB} \frac{(x-2)dx}{(x-1)^2} + \int\limits_{BC} \frac{ydy}{(x+y)^2} + C_1 = \int\limits_0^x \frac{(t-2)dt}{(t-1)^2} +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{y} \frac{tdt}{(x+t)^2} + C_1 = \left(\ln|t-1| + \frac{1}{t-1}\right)\Bigg|_0^x + \left(\ln|x+t| + \frac{x}{x+t}\right)\Bigg|_{-1}^{y} + C_1 =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + 1 + \ln|x+y| - \ln|x-1| + \frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-1} + C_1 =$$

$$= \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} + C_1 = \ln(-x-y) + \frac{x}{x+y} + C_1.$$

$$u_2(x,y) = \int\limits_{A_1B_1} \frac{x+2}{(x+1)^2}dx + \int\limits_{B_1C_1} \frac{ydy}{(x+y)^2} + C_2 = \int\limits_0^x \frac{(t+2)dt}{(t+1)^2} +$$

$$+ \int\limits_1^y \frac{tdt}{(x+t)^2} + C_2 = \left(\ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right)\Bigg|_0^x + \left(\ln|x+t| + \frac{x}{x+t}\right)\Bigg|_1^y + C_2 =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + 1 + \ln|x+y| +$$

$$+ \frac{x}{x+y} - \ln|x+1| - \frac{x}{x+1} + C_2 = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + C_2.$$

Задачи на применение формулы Грина.

2.10. Вычислить криволинейные интегралы II рода:

а) $\int\limits_L (4xy - 15x^2y)dx + (2x^2 - 5x^3 + 7)dy,$

L: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ от $A\left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$ до $B(1, 0)$;

б) $\int\limits_L xdy + ydx$, L: $\begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{\pi^2}, & x \neq 0, \\ \dfrac{4}{\pi^2}, & x = 0 \end{cases}$

от $A\left(0, \dfrac{4}{\pi^2}\right)$ до $B\left(\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{8}{\pi^2}\right)$;

в) $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$

L: $x^2 + y^2 = 2x$, $y \leqslant 0$ от $A(0, 0)$ до $B(2, 0)$.

Решение.

а) Поскольку

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 5x^3 + 7) = 4x - 15x^2 = P_y = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 15x^2y),$$

удобно применить формулу Грина, предварительно соединив точки A и B отрезком оси OX (рис. 2.10).

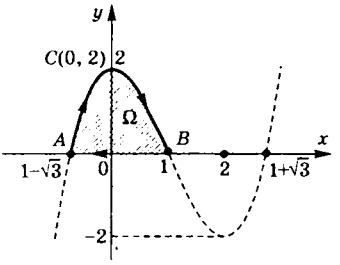

Рис. 2.10

При положительном обходе кусочно-гладкого контура ABC (область Ω, ограниченная им, при этом остается слева) контурный интеграл согласно формуле Грина равен соответствующему двойному интегралу по области Ω, а именно:

$$\oint\limits_{ABCA} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\Omega} (Q_x - P_y)dxdy.$$

В нашем случае в силу условия потенциальности $Q_x = P_y$ правая часть обращается в нуль. Поэтому

$$\oint\limits_{ABCA} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BCA} Pdx + Qdy = 0.$$

Следовательно, искомый интеграл

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{ACB} Pdx+Qdy$$

сводится к интегралу по отрезку AB, т. е.

$$\int_L (4xy-15x^2y)dx+(2x^2-5x^3+7)dy=$$

$$=\int_{AB}(4xy-15x^2y)dx=\int_{1-\sqrt{3}}^{1}0dx=0.$$

б) В этом примере также во всей плоскости R_2 выполнено условие потенциальности $Q_x=P_y$. Замкнем линию L ломаной $AOCB$, где

$$AO:\ x=0,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{4}{\pi^2},$$

$$OC:\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2}{\pi},$$

$$CB:\ x=\frac{2}{\pi},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{8}{\pi^2}.$$

Согласно формуле Грина искомый интеграл равен

$$\int_L xdy+ydx=\int_{AOCB} xdy+ydx=\int_{AO} xdy+\int_{OC} ydx+\int_{CB} xdy=$$

$$=\int_{\frac{4}{\pi^2}}^{0}0\cdot dy+\int_{0}^{\frac{2}{\pi}}0\cdot dy+\int_{0}^{\frac{8}{\pi^2}}\frac{2}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\Big|_0^{\frac{8}{\pi^2}}=\frac{16}{\pi^3}.$$

в) В этом примере

$$Q_x=\frac{\partial}{\partial x}(xy+x-y)=y+1,$$

$$P_y=\frac{\partial}{\partial y}(xy+x+y)=x+1,$$

$$Q_x-P_y=y-x.$$

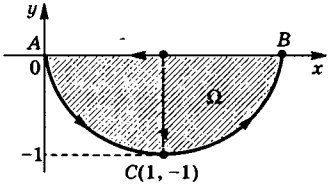

Рис. 2.11

Соединяем точки A и B кривой L отрезком оси OX, получаем контур (рис. 2.11).

По формуле Грина

$$\oint_{ACBA}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=\iint_{\Omega}(y-x)dxdy.$$

Далее,

$$\oint\limits_{ACBA}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=$$

$$=-\int\limits_{ACB}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy+\int\limits_{BA}xdx=$$

$$=\int\limits_{L}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy+\int\limits_{0}^{2}xdx=$$

$$=\int\limits_{L}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy-2.$$

С учетом формулы Грина получаем

$$\int\limits_{L}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=2+\iint\limits_{\Omega}(y-x)dxdy.$$

Для расчета двойного интеграла перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi;\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

$$\iint\limits_{\Omega}(y-x)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}r^2dr=$$

$$=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin\varphi-\cos\varphi)\cos^3\varphi d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\cos^3\varphi)d(\cos\varphi)-$$

$$-\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{2}{3}\cos^4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{8}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi.$$

Последний интеграл равен $\frac{3\pi}{16}$ (он подробно рассчитан в задаче 3а). Следовательно,

$$\int\limits_{L}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=2-\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{8-3\pi}{6}.$$

2.11. Вычислить криволинейный интеграл II рода

$$\int\limits_{L}x^2ydx-y^2xdy,$$

где L: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)^2$, $y\geqslant 0$ от $A(0,0)$ до $B(a,0)$.

Р е ш е н и е. Чтобы получить представление о кривой L, называемой лемнискатой, проще всего перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис. 2.12).

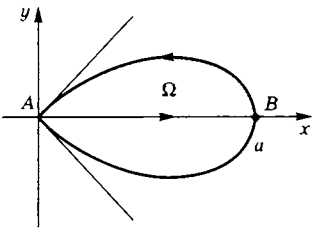

Рис. 2.12

$$L:\ r^2 = a^2\cos 2\varphi,\quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Соединяя точки A и B отрезком оси OX, получим замкнутый контур C, ограничивающий область Ω (см. рис. 2.7). Векторное поле $\vec{A} = (P, Q) = (x^2y, -y^2x)$ непрерывно-дифференцируемо в $\bar{\Omega}$, поэтому можно применить к контурному интегралу по C формулу Грина. Получаем

$$\oint_C x^2ydx - y^2xdy = \iint_\Omega (-x^2 - y^2)dxdy.$$

Используя свойство криволинейных интегралов, можно записать:

$$\oint_C x^2ydx - y^2xdy = \int_{AB} x^2ydx - y^2xdy - \int_L x^2ydx - y^2xdy.$$

Учтем, что интеграл по отрезку AB обращается в нуль ($y = 0$, $dy = 0$ на оси OX), следовательно, искомый интеграл равен

$$\int_L x^2ydx - y^2xdy = \iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам:

$$\iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy = \iint_D r^3drd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3dr = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^4}{8}\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^4}{32}.$$

Задачи на вычисление поверхностных интегралов I рода.

2.12. Вычислить поверхностные интегралы I рода:

а) $\iint\limits_{\sigma} |x|\,dS$, σ: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$;

б) $\iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2)dS$, σ: $x^2+y^2=2z$, $z=1$;

в) $\iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2+z^2)dS$, σ: часть конуса $z^2-x^2-y^2=0$, $z\geqslant 0$, отсекаемая цилиндром $x^2+y^2-2x=0$.

Р е ш е н и е.

а) Представим полусферу $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$ параметрическими уравнениями:

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\cos\theta,\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Элемент площади в этом представлении равен

$$dS=\sin\theta\, d\varphi d\theta.$$

После всех подстановок поверхностный интеграл I рода сводится к двойному интегралу по области D:

$$\varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]:$$

$$\iint\limits_{\sigma}|x|\,dS=\iint\limits_{D}\sin^2\theta\,|\cos\varphi|\,d\theta d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}|\cos\varphi|\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\cdot\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(+\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

б) Элемент площади параболоида $2z=x^2+y^2$ вычисляется обычным образом:

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

Поверхностный интеграл сводится к двойному по кругу $x^2+y^2\leqslant 2$ на плоскости XOY:

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

Для вычисления этого интеграла переходим к полярным координатам:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,r^3dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}-(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]dt=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4\pi}{15}\left(1+15\sqrt{3}\right).$$

в) Элемент площади конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ равен

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Поверхностный интеграл сводится к двойному по кругу $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ на плоскости XOY (учитываем, что $z^2=x^2+y^2$):

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}2(x^2+y^2)dxdy.$$

И в этом случае переходим к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, с областью интегрирования D:

$$0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi,\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:$$

$$\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}2(x^2+y^2)dxdy=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^3dr=8\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=3\sqrt{2}\pi.$$

2.13. Найти массу цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=0$, $z=H$, если в каждой точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до начала координат.

Р е ш е н и е. По условию задачи поверхностная плотность $p=\frac{k}{r^2}$ $(k=\text{const})$, $r^2=x^2+y^2+z^2$. Поверхность цилиндра проектируется в прямоугольник $y\in[-R,R]$, $z\in[0,H]$

на плоскости YOZ. Искомую массу можно выразить поверхностным интегралом I рода:

$$M = \iint\limits_{\sigma} \frac{k dS}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Элемент площади цилиндрической поверхности $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ равен

$$dS = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\, dy dz = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy dz.$$

Вычисляем поверхностный интеграл с помощью двойного по прямоугольнику $|y| \leqslant R, 0 \leqslant z \leqslant H$ на плоскости YOZ (учитываем, что $x^2 = R^2 - y^2$):

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{k dS}{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{0}^{H} \frac{kR dz}{(R^2 + z^2) \cdot \sqrt{R^2 - y^2}} =$$

$$= 2kR \int\limits_{-R}^{R} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int\limits_{0}^{H} \frac{dz}{R^2 + z^2} =$$

$$= 2k \left(\arcsin \frac{y}{R} \Big|_{-R}^{R} \right) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{R} \Big|_{0}^{H} \right) = 2k\pi \operatorname{arctg} \frac{H}{R}.$$

2.14. Найти центры тяжести:

а) полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, с поверхностной плотностью $p = k(x^2 + y^2)$, $k = \text{const}$;

б) конуса $az^2 = b^2(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant b$, $p = p_0 = \text{const}$.

Р е ш е н и е.

а) Из соображений симметрии ясно, что $x_c = y_c = 0$. Определим z_c с помощью поверхностного интеграла I рода:

$$z_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} z \cdot p dS}{\iint\limits_{\sigma} p dS}.$$

Элемент площади полусферы равен

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Рассчитаем массу полусферы:

$$\iint\limits_{\sigma} p\,dS = kR \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Вводим полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с областью изменения переменных $0 \leqslant z \leqslant R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$kR \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = kR \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{r^3\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} =$$

$$= \pi kR \int\limits_0^{R^2} \frac{dt}{\sqrt{R^2-t}} = -2\pi kR\sqrt{R^2-t}\cdot t\Big|_0^{R^2} + 2\pi kR \int\limits_0^R \sqrt{R^2-t}\,dt =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi kR(R^2-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R^2} = \frac{4}{3}\pi kR^4.$$

Находим аппликату z_c центра тяжести полусферы:

$$z_c = \frac{3}{4\pi kR^4} \iint\limits_{\sigma} z\cdot\rho\,dS = \frac{3}{4\pi R^3} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{3}{8}R.$$

б) В случае конуса так же, как и для полусферы, $x_c = y_c = 0$.

Прежде всего определим массу конуса с помощью поверхностного интеграла:

$$M = \iint\limits_{\sigma} p\,dS = \frac{b}{a}p_0 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}p_0\pi a^2\cdot\frac{b}{a} = \sqrt{2}p_0\pi ab.$$

(Элемент площади конуса рассчитан в задаче 2.12.в.)

Рассчитаем аппликату z_c центра тяжести однородного конуса $az^2 = b^2(x^2+y^2)$; $z \in [0, b]$:

$$M\cdot z_c = \iint\limits_{\sigma} z\cdot p\,dS = p_0 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{b}{a}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\frac{b^2}{a^2}p_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2\,dr = \frac{2\sqrt{2}\pi p_0 b^2 a}{3}.$$

Следовательно,

$$z_c = \frac{2}{3}b.$$

Задачи на вычисление поверхностных интегралов II рода.

2.15. Вычислить интеграл II рода

$$\iint\limits_S x\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leqslant R^2$; $z \in [-H, H]$.

Р е ш е н и е. Сначала спроектируем данную поверхность на плоскость XOY. Боковая цилиндрическая поверхность проектируется на окружность $x^2 + y^2 = R^2$ с нулевой двумерной мерой, поэтому двойной интеграл по этой поверхности обратится в нуль. Основания цилиндра $z = \pm H$ спроектируются на «двухслойный» круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, при этом проекции верхнего основания $z = H$ будет отвечать двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} H^2\,dxdy$ (нормальный вектор $\vec{n} = (0, 0, 1)$), проекции нижнего основания $z = -H$ отвечает двойной интеграл $-\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} H^2\,dxdy$ (нормальный вектор $\vec{n} = (0, 0, -1)$). Суммирование этих интегралов приводит к нулевому значению.

Теперь займемся проекцией поверхности S на плоскость XOZ. Проекцией S является «двухслойный» прямоугольник $|x| \leqslant R, |z| \leqslant H$. Основания $z = \pm H$ в данном случае проектируются на отрезки $z = \pm H$, $|x| \leqslant R$ с двумерной мерой на плоскости XOZ, равной нулю, поэтому соответствующие двойные интегралы по основаниям равняются нулю. Один «слой» прямоугольника $|x| \leqslant R, |z| \leqslant H$ является проекцией цилиндрической поверхности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, нормаль к которой $\vec{n}$ имеет острый угол с осью OY. Этому «слою» соответствует двойной интеграл

$$\iint\limits_{\substack{|x| \leqslant R \\ |z| \leqslant H}} (R^2 - x^2)\,dzdx = \int\limits_{-H}^{H} dz \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{8}{3} HR^3.$$

Другой «слой» прямоугольника $|x| \leqslant R, |z| \leqslant H$ является проекцией цилиндрической поверхности $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$,

нормаль к которой $\vec{n}$ образует тупой угол с осью OY. Соответствующий двойной интеграл равен

$$-\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\|z|\leqslant H}}(R^2-x^2)dzdx=-\frac{8}{3}HR^3.$$

Суммирование этих интегралов также приводит к нулевому результату.

Наконец, обратимся к проекции поверхности S на плоскость YOZ. И в этом случае основания $z=\pm H$, $|y|\leqslant R$ с нулевой двумерной мерой на плоскости YOZ и соответствующие двойные интегралы по основаниям $z=\pm H$ обратятся в нуль. Боковая поверхность тела S спроектируется на «двухслойный» прямоугольник $|y|\leqslant R$, $|z|\leqslant H$. При этом, как и в предыдущем рассмотрении, один «слой» является проекцией цилиндрической поверхности $x=\sqrt{R^2-y^2}$ с нормалью $\vec{n}$, имеющей острый угол с осью OX, другой — проекция поверхности $x=-\sqrt{R^2-y^2}$, нормаль к которой образует тупой угол с осью OX. Поверхностный интеграл $\iint\limits_S xdydz$ будет равен

$$\iint\limits_S xdydz=\iint\limits_{\substack{|y|\leqslant R\\|z|\leqslant H}}\sqrt{R^2-y^2}dydz-\iint\limits_{\substack{|y|\leqslant R\\|z|\leqslant H}}\left(-\sqrt{R^2-y^2}\right)dydz=$$

$$=2\int\limits_{-H}^{H}dz\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy=4H\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy=2\pi HR^2.$$

(Последний интеграл равен половине площади круга радиуса R.)

Подводя итоги сказанному и используя свойство аддитивности поверхностного интеграла II рода, окончательно получаем

$$\iint\limits_S xdydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\pi HR^2.$$

2.16. Вычислить поверхностный интеграл II рода

$$\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

где S — внутренняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; $z\in[-H,H]$.

Р е ш е н и е. Эллипсоид S запишем в параметрической форме:

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = b\sin\theta\sin\varphi, \quad \theta\in[0,\pi], \quad \varphi\in[0,2\pi],$$
$$z = c\cos\theta.$$

Рассчитаем касательные векторы

$$\vec{\tau_\theta} = (x_\theta, y_\theta, z_\theta), \quad \vec{\tau_\varphi} = (x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi),$$

элемент площади $dS = |\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi}|\,d\theta d\varphi$, а также нормальный вектор

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi}}{|\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi}|}$$

(знак выбирается в зависимости от стороны эллипсоида). Получаем:

$$\vec{\tau_\theta} = (a\cos\theta\cos\varphi,\ b\cos\theta\sin\varphi,\ c\sin\theta),$$
$$\vec{\tau_\varphi} = (-a\sin\theta\sin\varphi,\ b\sin\theta\cos\varphi,\ 0),$$
$$\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi} = (bc\sin^2\theta\cos\varphi,\ ac\sin^2\theta\sin\varphi,\ ab\sin\theta\cos\theta).$$

Для расчета поверхностного интеграла II рода воспользуемся формулой (2.54), которая фактически сводит его к поверхностному интегралу I рода. В нашем случае $P = x$, $Q = y$, $R = z$,

$$\vec{n}\,dS = -\frac{\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi}}{|\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi}|}\cdot|\vec{\tau_\theta}\times\vec{\tau_\varphi}|\,d\theta d\varphi =$$

$$= -(bc\sin^2\theta\cos\varphi d\theta d\varphi,\ ac\sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi,\ ab\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi).$$

(Знак «$-$» соответствует внутренней стороне эллипсоида.)

Таким образом, получаем:

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy =$$

$$= -abc\iint\limits_{\substack{0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} (\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta d\varphi =$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d(\cos\theta) + abc\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d(\cos\theta) +$$

$$+2\pi abc\int_0^{\pi}\cos^2\theta d(\cos\theta)=abc\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int_1^{-1}(1-t^2)dt+$$

$$+abc\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int_1^{-1}(1-t^2)dt=2\pi abc\int_1^{-1}t^2dt=-4\pi abc.$$

2.17. Вычислить поверхностный интеграл II рода

$$\iint_S(xy^2+z^2)dydz+(yz^2+x^2)dzdx+(zx^2+y^2)dxdy,$$

где S — внешняя сторона верхней ($z\geqslant 0$) полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Р е ш е н и е. Проекция S на плоскость XOY — круг радиуса a:

$$x^2+y^2\leqslant a^2.$$

Приведем данный поверхностный интеграл к двойному по переменным x, y. При этом снова воспользуемся формулой (2.54). В нашем случае

$$P=xy^2+z^2,\quad Q=yz^2+x^2,\quad R=zx^2+y^2,\quad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\vec{n}=\left(-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ -\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right).$$

(Знак «$-$» соответствует внешней стороне полусферы.)

$$\vec{n}dS=\vec{dS}=(-z_xdxdy,\ -z_ydxdy,\ dxdy)=$$

$$=\left(\frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \frac{ydxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ dxdy\right).$$

Проведем необходимые расчеты:

$$\iint_S(xy^2+z^2)dydz+(yz^2+x^2)dzdx+(zx^2+y^2)dxdy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[\frac{(xy^2+a^2-x^2-y^2)x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\frac{(xy^2+y(a^2-x^2-y^2))y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}x^2+y^2\right)\right]dxdy.$$

Заметим, что в силу симметрии области интегрирования относительно осей OX, OY все интегралы от функций, содержащих нечетные степени переменных x, y в числителях, обратятся в нуль. В силу этого замечания остается только интеграл, содержащий четные степени x, y, который и вычисляется в дальнейшем переходом к полярным координатам:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(\frac{x^2y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+(x^2+y^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}+y^2\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left(\frac{r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}+r^3\sqrt{a^2-r^2}+r^3\sin^2\varphi\right)dr=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\int\limits_0^a\frac{r^4dr^2}{\sqrt{a^2-r^2}}+\pi\int\limits_0^a r^2\sqrt{a^2-r^2}dr^2+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int\limits_0^a r^3dr=\frac{\pi}{8}\int\limits_0^{a^2}\frac{t^2dt}{\sqrt{a^2-t}}+\pi\int\limits_0^{a^2}t\sqrt{a^2-t}dt+\frac{\pi a^4}{4}=$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(-2\sqrt{a^2-t}\cdot t^2\Big|_0^{a^2}-\left(\frac{4}{3}\sqrt{(a^2-t)^3}\cdot 2t\Big|_0^{a^2}\right)+\left(-\frac{8}{15}\sqrt{(a^2-t)^5}\cdot 2\Big|_0^{a^2}\right)\right)+$$

$$+\pi\left(-\frac{2}{3}\sqrt{(a^2-t)^3}\cdot t\Big|_0^{a^2}-\left(\frac{4}{15}\sqrt{(a^2-t)^5}\Big|_0^{a^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{\pi a^4}{4}=\frac{2\pi a^5}{15}+\frac{4\pi a^5}{15}+\frac{\pi a^4}{4}=\frac{2\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{20}(8a+5).$$

Задачи, связанные с формулой Гаусса–Остроградского.

2.18. Найти дивергенцию векторного поля:

а) $\vec{A}=xy^2\vec{i}+x^2y\vec{j}+z^3\vec{k}$ в точке $M(1,-1,3)$;

б) градиента функции $\varphi=xy^2z^2$;

в) $\vec{A}=yz(4x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k})$.

Р е ш е н и е.

а) По определению (см. 2.20)

$$\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial z}z^3=y^2+x^2+3z^2.$$

Отсюда при $x=1$, $y=-1$, $z=3$ получаем

$$\operatorname{div}\vec{A}\Big|_{M(1,-1,3)}=29.$$

б) Прежде всего рассчитаем градиент функции φ:

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = y^2z^2\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 2xzy^2\vec{k}.$$

Теперь находим дивергенцию этого векторного поля:

$$\nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z^2} =$$

$$= 2xz^2 + 2xy^2 = 2x(y^2 + z^2).$$

в) $$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\vec{A} = \frac{\partial(4xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(-z^2y)}{\partial z} = 4yz - 2yz - 2zy = 0.$$

Дивергенция поля $\vec{A}$ оказалась равной нулю в каждой точке пространства. Векторное поле $\vec{A}$ соленоидальное.

2.19. Найти поток векторного поля $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $|z| \leqslant H$ (нормаль внешняя);

б) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant 4z^2$, $z \in [0, 1]$ (нормаль внутренняя);

в) через полную поверхность куба $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$ (нормаль внешняя).

Р е ш е н и е.

а) Используем формулу Гаусса–Остроградского:

$$\iint\limits_S \vec{r}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}\cdot dV.$$

Очевидно, что $S = S_{\text{бок}} \cup S_{\text{осн}}$ ($S_{\text{бок}}$, $S_{\text{осн}}$ — боковая поверхность и поверхность основания цилиндра) и по свойству аддитивности поверхностного интеграла получаем:

$$\iint\limits_S \vec{r}\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS + \iint\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS.$$

Без труда вычисляются интегралы

$$\iint\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS \text{ и } \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}\cdot dV:$$

$$\iint\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} H dxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (-H)dxdy = 2H\pi R^2$$

(см. решение задачи 2.15),

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}\cdot dV = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dxdy\int\limits_{-H}^{H} dz = 3H\pi R^2.$$

Таким образом, для искомого потока через боковую поверхность цилиндра получаем значение

$$\iint\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}\cdot dV - \iint\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS = \pi R^2 H.$$

б) Вычислим поток радиуса-вектора через основание конуса ($z = 1$):

$$\iint\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} dxdy = -4\pi.$$

Знак «$-$» означает, что $\vec{n}$ — внутренняя нормаль. Теперь так же, как и в предыдущем решении, используем формулу Гаусса–Остроградского и аддитивность поверхностного интеграла. В расчетах используем внешнюю нормаль $\vec{n}$, затем просто поменяем знак на противоположный:

$$\iint\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}\cdot dV - \iint\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{r}\cdot\vec{n}dS =$$

$$= 3\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} dxdy\int\limits_{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz - 4\pi =$$

$$= 3\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} dxdy - 4\pi - \frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 r^2 dr d\varphi = 8\pi - \frac{3}{2}2\pi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = 0.$$

в) Применим формулу Гаусса–Остроградского. Поскольку $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, поток радиуса-вектора через поверхность куба будет равен утроенному объему куба со стороной $2a$. Итак,

$$\iint\limits_S \vec{r}\cdot\vec{n}dS = 24a^3.$$

Задачи, связанные с формулой Стокса.

2.20. Вычислить ротор следующих векторных полей:

а) $\vec{A} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$;

б) $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

Р е ш е н и е.

а) По определению

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & -z^2 & y^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2y + 2z);$$

б) $$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Поле $\vec{A}$, заданное в R_3, оказалось безвихревым, следовательно, это поле потенциально и его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля φ, т. е.

$$\vec{A} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Найдем это скалярное поле φ с помощью криволинейного интеграла II рода (это поле определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого):

$$\varphi = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y 0\,dt + \int_0^z xy\,dt + C = xyz + C.$$

В этих расчетах за начальную точку (x_0, y_0, z_0) принята точка $(0, 0, 0)$.

2.21. Вычислить циркуляцию векторного поля:

а) $\vec{A} = x^2y^2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

б) $\vec{A} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ вдоль периметра треугольника ABC с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Р е ш е н и е.

а) При $z = 0$ получаем плоское поле $\vec{A} = x^2y^2\vec{i} + \vec{j}$, где $P = x^2y^2$, $Q = 1$. Для вычисления циркуляции этого поля по окружности $x^2 + y^2 = a^2$ можно использовать формулу Грина (2.62):

$$\oint_{x^2+y^2=a^2} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = -2 \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y\,dx\,dy =$$

$$= -2\int_{-a}^{+a} x^2\,dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = -2\int_{-a}^{+a} x^2\,dx\, y^2\Big|_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} = 0.$$

б) По формуле Стокса циркуляция векторного поля по треугольнику ABC равна потоку $\operatorname{rot}\vec{A}$ через плоскость треугольника ABC с внешней нормалью (нормаль образует с осью OZ острый угол), т. е.

$$\oint_{ABC} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_{ABC}} (\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n})dS.$$

Рассчитаем необходимые величины, входящие в правую часть формулы Стокса:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -\vec{j}\cdot 7 + \vec{k};$$

S_{ABC}: $x+y+z=1$;

$\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$;

$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \sqrt{3}dxdy.$

Таким образом, искомая циркуляция равна:

$$\oint_{ABC} \vec{A}\cdot\vec{l} = -6 \iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0\\ y\ge 0}} dxdy = -6\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = -3.$$

Общие задачи, связанные со скалярными и векторными полями.

2.22. Найти $\operatorname{grad} U$, если:

а) $U = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

б) $U = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Р е ш е н и е.

а) Проще всего задача решается переходом к сферическим координатам. В этих координатах $U = r$ и с помощью формул (2.80) получаем

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r.$$

(Поскольку скалярное поле U не зависит от θ и φ.)
В декартовых координатах $\operatorname{grad} U$ имеет вид

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}.$$

б) В сферических координатах:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\vec{e}_r = -\frac{2}{r^3}\vec{e}_r.$$

В декартовых координатах:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{i} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{k} =$$

$$= (-2)\left(\frac{x\vec{i}}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{y\vec{j}}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right).$$

2.23. Найти угол между $\operatorname{grad}\ln(x^2+y^2+z^2)$ и $\operatorname{grad}(xy + yz + zx)$ в точке $M(1, 1, -1)$.

Р е ш е н и е. Проведем необходимые вычисления:

$$\operatorname{grad}\ln(x^2+y^2+z^2) = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

$$\operatorname{grad}\ln(x^2+y^2+z^2)\big|_{M(1,1,-1)} = \frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}),$$

$$\operatorname{grad}(xy+yz+zx) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k},$$

$$\operatorname{grad}(xy+yz+zx)\big|_{M(1,1,-1)} = 2\vec{k}.$$

По известной формуле из векторной алгебры (см. часть I § 2.26) угол α между градиентами в точке $M(1, 1, -1)$ равен:

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.24. Найти $\operatorname{div}\vec{A}$, если:

а) $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$; б) $\vec{A} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k})$.

Решение.

а) Запишем векторное поле $\vec{A}$ в декартовых координатах:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Рассчитаем соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Суммируем эти производные и получаем искомую дивергенцию поля $\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

б) Рассчитаем частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Складываем эти производные и получаем искомую $\operatorname{div}\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2-y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}=\frac{2x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$$

2.25. Найти $\operatorname{rot}\vec{A}$, если:

а) $\vec{A}=\frac{y}{z}\vec{i}+\frac{z}{x}\vec{j}+\frac{x}{y}\vec{k}$;

б) $\vec{A}=\vec{r}f(r)$, где $f(r)$ — произвольная дифференцируемая функция $\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.

Решение.

а) Действуем в соответствии с формулой (2.21):

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{y}{z} & \frac{z}{x} & \frac{x}{y}\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x}\right)\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right)\right)=\vec{i}\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)+\vec{j}\left(-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{y}\right)+\vec{k}\left(-\frac{z}{x^2}-\frac{1}{z}\right)=$$

$$=-\left(\frac{1+x^2}{xy^2},\ \frac{1+y^2}{yz^2},\ \frac{1+z^2}{zx^2}\right).$$

б) Запишем поле $\vec{A}$ в декартовых координатах:

$$\vec{A}=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x,y,z).$$

По формуле (2.21) рассчитаем искомый вихрь:

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(zf(r))-\frac{\partial}{\partial z}(yf(r))\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}(xf(r))-\frac{\partial}{\partial x}(zf(r))\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(yf(r))-\frac{\partial}{\partial y}(xf(r))\right)=$$

$$=\vec{i}\left(xf'(r)\cdot\frac{y}{r}-yf'(r)\cdot\frac{z}{r}\right)+\vec{j}\left(xf'(r)\cdot\frac{z}{r}-zf'(r)\cdot\frac{x}{r}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(yf'(r)\cdot\frac{x}{r}-xf'(r)\cdot\frac{y}{r}\right)=\vec{0}.$$

Поле $\vec{A}$, заданное в R_3, оказалось безвихревым ($\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{0}$). Как известно, безвихревое поле, определенное во всем пространстве, обладает потенциалом φ, т. е. поле $\vec{A}$ можно представить в виде

$$\vec{A}=\operatorname{grad}\varphi.$$

В данном случае можно положить $\varphi = F(r)$, где функция $F(r)$ такова, что $F'_r(r) = rf(r)$, т. е. $F(r)=\int rf(r)dr$.

2.26. Пусть $f(r)$ — произвольная дифференцируемая функция ($f(r)\in C^1(R)$). Выяснить, когда

а) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$;

б) $\operatorname{div}(f(r)\cdot\vec{r})=0$.

Решение.

а) Для решения этой задачи удобно использовать сферические координаты и формулы, выражающие градиент и дивергенцию в этих координатах (см. 2.79, 2.83):

$$\operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r$$

(только одна компонента по направлению радиуса-вектора),

$$\operatorname{divgrad} f(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

Если последнее выражение равно нулю, тогда

$$r^2\cdot\frac{\partial f}{\partial r}=C=\text{const}.$$

Отсюда получаем

$$f(r)=-\frac{C}{r}.$$

б) Рассчитаем дивергенцию поля $f(r)\cdot\vec{r}$:

$$\operatorname{div}(f(r)\cdot\vec{r})=\frac{\partial(f(r)\cdot x)}{\partial x}+\frac{\partial(f(r)\cdot y)}{\partial y}+\frac{\partial(f(r)\cdot z)}{\partial z}=$$

$$=3f(r)+\frac{f'(r)}{r}(x^2+y^2+z^2)=3f(r)+rf'(r).$$

Выясним, для каких функций $f(r)$ эта дивергенция обращается в 0. Нетрудно проверить, что при

$$f(r)=\frac{C}{r^3}\quad (C=\text{const})$$

получаем нулевое значение:

$$3f(r)+rf'(r)=\frac{3C}{r^3}+r\left(\frac{C}{r^3}\right)'=0.$$

В следующей главе, посвященной дифференциальным уравнениям, будет показано, что других функций, обладающих данным свойством, не существует. Итак,

$$\operatorname{div}\left(\frac{C\cdot\vec{r}}{r^3}\right)=0.$$

2.27. Проверить, является ли поле $\vec{A}$ соленоидальным ($\operatorname{div}\vec{A}=0$). Если да, то найти его векторный потенциал:

а) $\vec{A}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$;

б) $\vec{A}=ye^{x^2}\vec{i}+2yz\vec{j}-(2xzye^{x^2}+z^2)\vec{k}$.

Р е ш е н и е.

а) $$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial(y+z)}{\partial x}+\frac{\partial(x+z)}{\partial y}+\frac{\partial(x+y)}{\partial z}=0.$$

Следовательно, поле $\vec{A}$ соленоидально. Найдем его векторный потенциал $\vec{B}$. Как известно (§ 2.4), векторный потенциал определяется с точностью до слагаемого $\operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi(x, y, z)$ — произвольная дифференцируемая функция. Поэтому будем искать наиболее простое выражение для векторного потенциала $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$. В частности, положим $B_3=0$. Компоненты B_1 и B_2 определим из уравнения

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=-\frac{\partial B_2}{\partial z}\vec{i}+\frac{\partial B_1}{\partial z}\vec{j}+\left(\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial B_2}{\partial z}=-y-z\Rightarrow B_2=\int(-y-z)dz+f(x,y),$$

где $f(x, y)$ — произвольная дифференцируемая функция;

$$\frac{\partial B_1}{\partial z}=x+z\Rightarrow B_1=\int(x+z)dz+g(x,y),$$

где $g(x, y)$ — произвольная дифференцируемая функция.

После интегрирования определяем B_1 и B_2:

$$B_1 = xz + \frac{z^2}{2} + g(x, y),$$

$$B_2 = -yz + \frac{z^2}{2} + f(x, y).$$

Чтобы определить функции g и f, вспомним, что существует еще одно не удовлетворенное условие:

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = x + y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-yz + \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xz + \frac{z^2}{2}\right) + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x + y.$$

Нас интересует наиболее простое частное выражение для функций g и f. Можно, например, положить

$$g = \frac{x^2}{2} \text{ и } f = -\frac{y^2}{2},$$

тогда $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$. Таким образом, искомый векторный потенциал $\vec{B}$ имеет вид:

$$\vec{B} = \left(xz + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2},\ -yz - \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{2},\ 0\right) + \operatorname{grad}\varphi.$$

б) Рассчитаем $\operatorname{div}\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial(ye^{x^2})}{\partial x} + \frac{\partial(2yz)}{\partial y} - \frac{\partial(2xzye^{x^2} + z^2)}{\partial z} =$$

$$= 2xye^{x^2} + 2z - 2z - 2xye^{x^2} = 0.$$

Поле $\vec{A}$ соленоидально. Векторный потенциал $\vec{B}$ будем искать так же, как и в случае а):

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_2}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial B_1}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= ye^{x^2}\vec{i} + 2yz\vec{j} - +(2xyze^{x^2} + z^2)\vec{k}.$$

Отсюда последовательно получаем:

$$B_2 = -\int ye^{x^2}dz + f(x,y) = -yze^{x^2} + f(x,y),$$

$$B_1 = \int 2yzdz + g(x,y) = yz^2 + g(x,y),$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-yze^{x^2} + f) - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2 + g) = -2xyze^{x^2} - z^2 + f'_x - g'_y.$$

Самый простой выбор для функций f и g нулевой, т. е. $f = g = 0$. Окончательно получаем:

$$\vec{B} = (yz^2,\ -yze^{x^2},\ 0) + \operatorname{grad}\varphi,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — произвольное дифференцируемое скалярное поле.

2.28. Под действием силы тяжести $\vec{g}$, направленной противоположно оси OZ, тело единичной массы скатывается по спирали:

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = b(2\pi - \varphi),$$

от точки $A(a, 0, 2\pi b)$ до точки $B(a, 0, 0)$.

Найти работу поля при таком перемещении.

Р е ш е н и е. Векторное поле $\vec{F}$ силы тяжести имеет компоненты:

$$\vec{F} = (0, 0, -g),$$

где $g \approx 9{,}81\frac{\text{м}}{c^2}$.

Очевидно, что $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$, следовательно, это поле потенциально. Определим его потенциал:

$$\varphi = \int_0^x 0dt + \int_0^y 0dt - \int_0^z gdt + C = C - g\cdot z \quad (C = \text{const}).$$

Работа поля $\vec{F}$ при перемещении тела из A в B равна разности потенциалов в этих точках:

$$A = \varphi(B) - \varphi(A) = C - (C - g\cdot 2\pi b) = 2\pi gb.$$

2.29. Найти потенциал векторного поля $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ (электростатическое поле точечного заряда q). Вычислить $\operatorname{div}\vec{E}$. Рассчитать поток поля $\vec{E}$ через произвольную замкнутую кусочно-гладкую поверхность S.

Р е ш е н и е. В задаче 2.25 б) показано, что всякое центральное поле (т. е. поле вида $\vec{r} \cdot f(r)$, $f(r) \in C^1(R)$) является потенциальным, при этом за потенциал поля можно принять $\varphi = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} + C = C - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (C — произвольная постоянная, которую в электродинамике полагают равной нулю). Итак, потенциал точечного заряда равен

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

В задаче 2.26 б) показано, что $\operatorname{div}\left(\frac{C \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = 0$ во всех точках пространства, кроме начала координат. Следовательно, по формуле Гаусса–Остроградского в случае, если замкнутая поверхность S не охватывает начала координат, поток поля $\vec{E}$ через нее будет равен нулю. Если же поверхность S охватывает начало координат, то поток поля $\vec{E}$ через нее не зависит от формы и размера этой поверхности (см. § 2.6). Для расчета этого потока возьмем сферу произвольного радиуса R. Направление поля $\vec{E}$ совпадает (при $q > 0$) с направлением внешней нормали $\vec{n}$ к сфере и в точках сферы $|\vec{E}| = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \text{const}$, поэтому

$$\iint\limits_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Наконец, если начало координат лежит на самой поверхности S, то

$$\iint\limits_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \omega R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\omega}{4\pi},$$

где ω — телесный угол, который поверхность S вырезает на сфере достаточно малого радиуса с центром в начале координат. В частности, если в начале координат поверхность S гладкая, то $\omega = 2\pi$. Если, например, начало координат совпадает с вершиной куба (S — поверхность, ограничивающая куб), то $\omega = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ и т. д.

2.10. ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

Вычисление криволинейных интегралов I рода.

2.30. $\int\limits_L (x+y)dl$, где L — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

2.31. $\int\limits_L y^2 dl$, где L — арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.32. $\int\limits_L xy dl$,

где L — гипербола $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t \in [0, 1]$.

2.33. $\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$, где L — дуга астроиды.

2.34. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L — окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

2.35. $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, где L — часть винтовой линии $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{2\pi}$ $(t \in [0, 2\pi])$.

2.36. $\int\limits_L x^2 dl$, где L — кривая, задаваемая уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Применение криволинейных интегралов I рода.

2.37. Найти длины дуг пространственных кривых:

а) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, $t \in [0, 1]$;

б) $x^2 + y^2 = z$, $y = x\operatorname{tg} z$ от $O(0, 0, 0)$ до

$$A\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{\pi}{4}\right).$$

Вычисление массы дуги кривой.

2.38. Найти массу дуги кривой $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, \pi]$, если линейная плотность ее в точке $M(x, y)$ равна $\rho = y$.

2.39. Найти массу дуги параболы $y^2 = 4x$ ($x \in [0, 1]$), если линейная плотность в точке $M(x, y)$ равна $|y|$.

2.40. Найти массу дуги кривой $x = 6t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ ($t \in [0, 1]$), плотность которой равна $\sqrt{\frac{y}{3}}$.

Вычисление координат центра тяжести дуги кривой.

2.41. Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $x \in [0, 2]$.

2.42. Определить центр тяжести дуги циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, \pi]$.

2.43. Вычислить координаты центра тяжести контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

2.44. Найти координаты центра тяжести однородной дуги $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ ($t \in (-\infty, 0]$).

Вычисление криволинейных интегралов II рода.

2.45. Вычислить криволинейные интегралы II рода для заданных кривых и векторных полей:

а) $\vec{F} = (x^2 - 2xy,\ y^2 - 2xy)$; L: $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$;

б) $\vec{F} = (x + y,\ x - y)$; L: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс, обходимый против часовой стрелки;

в) $\vec{F} = (2 - y, x)$; L: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $t \in [0, 2\pi]$;

г) $\vec{F} = \left(\frac{x + y}{x^2 + y^2},\ \frac{y - x}{x^2 + y^2} \right)$; L: $x^2 + y^2 = a^2$ — окружность, проходимая против часовой стрелки;

д) $\vec{F} = \frac{1}{|x| + |y|}(1, 1)$, L — контур квадрата с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$;

е) $\vec{F} = (\sin y,\ \sin x)$, L — отрезок с вершинами $A(0, \pi)$, $B(\pi, 0)$.

2.46. Убедиться, что заданные векторные поля потенциальны в указанных областях, вычислить криволинейные интегралы II рода от точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$:

а) $\vec{F}=(y,x)$; $A(-1,2)$, $B(2,3)$;

б) $\vec{F}=(x,y)$; $A(0,1)$, $B(3,-4)$;

в) $\vec{F}=\left(\frac{y}{x^2},\ -\frac{1}{x}\right)$; $\Omega=\{(x,y):\ x>0\}$, $A(2,1)$, $B(1,2)$;

г) $\vec{F}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $x^2+y^2>0$, $A(1,0)$, $B(6,8)$;

д) $\vec{F}=\left(-\frac{y}{(x-y)^2},\ \frac{x}{(x-y)^2}\right)$;
$\Omega=\{(x,y):\ x>y\}$, $A(0,-1)$, $B(1,0)$;

е) $\vec{F}=\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x},\ \sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)$;
$\Omega=\{(x,y):\ x>0\}$, $A(1,\pi)$, $B(2,\pi)$.

2.47. Найти потенциал заданного векторного поля:

а) $\vec{F}=(x^2+2xy-y^2,\ x^2-2xy-y^2)$;

б) $\vec{F}=\left(\frac{y}{3x^2-2xy+3y^2},\ -\frac{x}{3x^2-2xy+3y^2}\right)$;

в) $\vec{F}=(e^x(e^y(x-y+2)+y),\ e^x(e^y(x-y)+1))$.

2.48. Вычислить криволинейные интегралы II рода, взятые вдоль пространственных кривых L от заданных векторных полей $\vec{F}$:

а) $\vec{F}=(y^2-z^2,\ 2yz,\ -x^2)$;
L: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^2$, $t\in[0,1]$;

б) $\vec{F}=(y-z,\ z-x,\ x-y)$; L: $x^2+y^2+z^2=1\wedge y=x$ — окружность, обходимая против часовой стрелки в правой системе координат XYZ;

в) $\vec{F}=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$;
L: $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$

— контур сферического треугольника, обходимого против часовой стрелки.

2.49. Убедиться, что заданное векторное поле потенциально в Ω и вычислить криволинейные интегралы II рода от точки $A(x_1, y_1, z_1)$ до точки $B(x_2, y_2, z_2)$:

а) $\vec{F} = (x, y^2, -z^3)$, $\Omega = R_3$, $A(1,1,1)$, $B(2,3,-4)$;

б) $\vec{F} = (z, xz, xy)$, $\Omega = R_3$, $A(1,2,3)$, $B(6,1,1)$.

2.50. Найти потенциал заданного векторного поля $\vec{F}$:

а) $\vec{F} = (x^2 - 2yz,\ y^2 - 2xz,\ z^2 - 2xy)$;

б) $\vec{F} = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z},\ \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2},\ -\frac{xy}{z^2}\right)$

в области Ω: $y > 0$, $z > 0$.

2.51. Вычислить работу поля $\vec{F}$ между точками A и B:

а) $\vec{F} = (e^{y-z},\ e^{z-x},\ e^{x-y})$, L — отрезок, соединяющий точки $A(0, 0, 0)$ и $B(1, 3, 5)$;

б) $\vec{F} = \left(\frac{1}{y},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{x}\right)$, L — отрезок, соединяющий точки $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 4, 8)$.

2.52. Рассчитать циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль заданного контура, обходимого против часовой стрелки:

А. $\vec{F} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$,

1) C — контур, не охватывающий $O(0, 0)$;

2) C — контур, охватывающий $O(0, 0)$.

Б. $\vec{F} = (-y, x, 1)$,

1) L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$,

2) L: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Применение формулы Грина.

2.53. С помощью формулы Грина вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по заданному контуру C:

а) $\vec{F} = ((x+y)^2, -x^2 - y^2)$, C — контур треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$;

б) $\vec{F} = (-x^2 y, xy^2)$, C: $x^2 + y^2 = 4$;

в) $\vec{F} = (x + y, y - x)$, C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

г) $\vec{F} = (e^x(1-\cos y), e^x(\sin y - y))$, где C — контур, охватывающий область Ω: $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$;

д) $\vec{F} = (e^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy, -e^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy)$, C: $x^2 + y^2 = 1$.

2.54. Вычислить криволинейный интеграл II рода по L: $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geqslant 0$ от точки $A(2, 0)$ до точки $O(0, 0)$:

$$\int_L (e^x \sin y - 4y)dx + (e^x \cos y - 4)dy.$$

2.55. С помощью формулы Грина вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

а) эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;

б) астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$;

в) параболой $(x^2 + y^2) = ax (a > 0)$ и осью OX;

г) петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$

(указание: положить $y = tx$);

д) лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

(указание: перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).

2.56. Найти значение интеграла:

$$\oint_C (x\cos(\vec{n}, x) + y\cos(\vec{n}, y))dl,$$

где C: $x^2 + y^2 = R^2$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к C.

2.57. Найти

$$\lim_{d(\Omega)\to 0} \frac{\oint_C (\vec{F}, \vec{n})dl}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(\Omega)$ — площадь области, ограниченная контуром C, содержащая точку $A(x_0, y_0)$ внутри себя; $D(\Omega)$ — диаметр области; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к C; $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$ — непрерывно-дифференцируемое векторное поле.

Вычисление поверхностных интегралов I рода.

2.58. Вычислить поверхностные интегралы I рода от заданного скалярного поля $f(x, y, z)$ по поверхности S:

а) $f(x, y, z) = x + y + z$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$;

б) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, S — граница конуса

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1, \ z \geqslant 0;$$

в) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{(1+x+y)^2}$, S — граница тетраэдра $x + y + z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$;

г) $f(x, y, z) = xyz$, S: $z = x^2 + y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$;

д) $f(x, y, z) = z^2$, S: $x = \dfrac{1}{2} r\cos\varphi$,

$y = \dfrac{1}{2} r\sin\varphi$, $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r$, $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$;

е) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

Применение поверхностных интегралов I рода.

2.59. Найти массу параболической поверхности

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad z \in [0, 1],$$

если поверхностная плотность $\rho = z$.

2.60. Найти массу полусферы параболической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geqslant 0)$, если поверхностная плотность $\rho = z$.

2.61. Найти координаты центра тяжести части однородной конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2$.

2.62. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2$.

2.63. Найти момент инерции относительно оси OZ однородной сферической оболочки $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geqslant 0)$.

Вычисление поверхностных интегралов II рода.

2.64. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через заданную поверхность S:

а) $\vec{F} = (x, y, z)$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, нормаль внешняя;

б) $\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$, S: $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, нормаль внешняя;

в) $\vec{F} = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right)$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, нормаль внешняя;

г) $\vec{F}=(x^2, y^2, z^2)$, S: $x^2+y^2+z^2=R^2$, нормаль внешняя;

д) $\vec{F}=(x^2, y^2, z^2)$, S: $z=x^2+y^2$, $z\in[0,1]$, нормаль внутренняя;

е) $\vec{F}=(x, y, -2z)$, S — поверхность куба с центром в начале координат со стороной a, нормаль внешняя;

ж) $\vec{F}=(2x^2, 3y^2, z^2)$, S — поверхность тела

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2R^2-x^2-y^2},\quad z\in[0,1],$$

нормаль внешняя;

з) $\vec{F}=(x^2, y^2, z)$, S — поверхность параболоида $z=x^2-y^2$, вырезаемая цилиндром $x^2+y^2=1$, нормаль образует острый угол с осью OZ.

Применение формулы Стокса.

2.65. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=(y, z, x)$$

по окружности C: $x^2+y^2+z^2=a^2\wedge x+y+z=0$ (нормаль к сфере внешняя, обход контура согласован с внешней нормалью).

2.66. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}=(z^3, x^3, y^3)$ по контуру C: $2x^2-y^2+z^2=1\wedge x+y=0$ (нормаль образует острый угол с осью OX, обход контура согласован с нормалью).

2.67. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=(y^2, xy, x^2+y^2)$$

по контуру C, который плоскости $x=0$, $y=0$, $z=1$ вырезают из параболоида $z=x^2+y^2$ (нормаль к параболоиду внешняя, обход контура C согласован с нормалью).

2.68. Вычислить работу поля

$$\vec{F}=(x^2-yz, y^2-xz, z^2-xy)$$

вдоль винтовой линии $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $z=\dfrac{\varphi}{2\pi}$ от точки $A(1, 0, 0)$ до точки $B(1, 0, 1)$.

(Указание: замкнуть винтовую линию отрезком BA и «натянуть» на этот контур винтовую поверхность $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=\dfrac{\varphi}{2\pi}$, $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $r\in[0, 1]$, $\varphi\in[0, 2\pi]$.)

2.69. Вычислить

$$\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

где C — сечение поверхности куба $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}$ (нормаль к сечению образует острый угол с осью OZX, обход контура согласован с нормалью).

2.70. Показать, что проекция $\operatorname{rot}\vec{F}(M_0)$ на направление $\vec{n}$ равна

$$\operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{F}(M_0) = \lim_{\substack{d(C)\to 0 \\ M_0 \in \Omega}} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}z}{\mu(\Omega)},$$

где Ω — часть плоскости, заключенная внутри контура C и перпендикулярная к $\vec{n}$, $d(C)$ — диаметр контура C. Контур обходится против часовой стрелки при наблюдении с $\vec{n}$.

2.71. Доказать формулу 2.76.

Применение формулы Гаусса–Остроградского.

2.72. Показать, что поток векторного поля

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$$

через замкнутую поверхность S, ограничивающую область $\Omega \subset R_3$, равен объему этой области $\mu(\Omega)$ (нормаль внешняя).

2.73. Показать, что проекция $\operatorname{rot}\vec{F}$ через замкнутую поверхность S равна 0.

2.74. Используя результат задачи 2.42, найти объем тела, ограниченного тором:

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ b > a > 0,$$
$$y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,$$
$$x = a\sin\psi,\ \psi \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

2.75. Рассчитать поток векторного поля $\vec{F}$ через заданную замкнутую поверхность S:

а) $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$, S — поверхность куба $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$, нормаль внешняя;

б) $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, нормаль внешняя;

в) $\vec{F} = (x^2y, xy^2, xyz)$, S — полная поверхность тела Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, нормаль внешняя;

г) $\vec{F} = (x^2y, -xy^2, (x^2 + y^2)z)$, S — поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z \in [0, H]$, нормаль внешняя;

д) $\vec{F}=(2x, y-z)$, S: $x=y^2+z^2 \wedge x=1$, нормаль внутренняя.

2.76. Вычислить

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S},$$

где $\vec{F}=(x^2, y^2, z^2)$, S — часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(z\in[0, H])$, нормаль внешняя.

(Указание: замкнуть S плоскостью $z=H$.)

2.77. Доказать закон Архимеда: выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела, целиком погруженного в нее, и направлена вертикально вверх.

(Указание: использовать закон Паскаля: сила давления жидкости на элементарную площадку dS замкнутой поверхности равна $\vec{f}=\rho g z\vec{n}dS$, где z — глубина погружения dS; $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к S; ρ — объемная плотность жидкости; g — ускорение силы тяжести.)

Применение оператора Гамильтона в векторном анализе.

2.78. Выполнить дифференциальные операции с использованием оператора Гамильтона

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right);$$

$\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ — векторные поля; $\vec{C}$ — постоянный вектор; $\varphi(x, y, z)$ — скалярное поле:

а) $\operatorname{div}\vec{C}\varphi=\nabla(\vec{C}\cdot\varphi)$, $\operatorname{div}\vec{F}\varphi=\nabla(\vec{F}\cdot\varphi)$;

б) $\operatorname{rot}\vec{C}\varphi=\nabla\times(\vec{C}\cdot\varphi)$,

$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\varphi=\nabla\times(\vec{F}\cdot\varphi)$, $\operatorname{rot}(\vec{F}_1\times\vec{F}_2)=\nabla\times(\vec{F}_1\times\vec{F}_2)$.

2.79. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}$, если $\vec{F}=(x^3, y^3, z^3)$.

2.80. Найти

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times(\nabla\times\vec{F})$, если $\vec{F}=(xy^2, yz^2, zx^2)$.

2.81. Найти

$\nabla^2\vec{F}=\Delta\vec{F}$, если $\vec{F}=(x(y^2+z^2), y(x^2+z^2), z(x^2+y^2))$.

Разные задачи векторного анализа.

2.82. Найти векторные потенциалы заданных соленоидальных полей:

а) $\vec{F} = (x^2y + y^3, x^3 - xy^2, 0)$;

б) $\vec{F} = (xy^2, x^2y, -zx^2 - zy^2)$.

2.83. Найти $\operatorname{div}\vec{F}$ и $\operatorname{rot}\vec{F}$, если поле $\vec{F}$ задано в цилиндрической системе координат:

а) $\vec{F} = \vec{e_r}$;

б) $\vec{F} = \vec{e_\varphi}$;

в) $\vec{F} = \vec{e_z}$.

2.84. Найти $\operatorname{div}\vec{F}$ и $\operatorname{rot}\vec{F}$, если поле $\vec{F}$ задано в сферических координатах:

а) $\vec{F} = \vec{e_r} + \vec{e_\theta}$;

б) $\vec{F} = \vec{e_r} + \vec{e_\varphi}$.

2.85. Векторное поле

$$\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - z\sqrt{x^2 + y^2}\,\vec{k}$$

выразить в цилиндрических координатах и найти в них $\operatorname{div}\vec{F}$ и $\operatorname{rot}\vec{F}$.

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Два действительных числа x и y называются упорядоченной парой, если указано, какое из них является первым, а какое — вторым. Упорядоченная пара обозначается символом (x, y), в котором на первом месте записан первый элемент пары x.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел, в которой x называется действительной частью и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. Это условно записывается в виде $z = (x, y)$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются равными, если равны их действительные и мнимые части, т. е. если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

3.2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Так же, как и для действительных чисел, для комплексных чисел определены две операции — сложения и умножения. Они определяются таким образом, чтобы в применении к двум действительным числам приводили к известным определениям суммы и произведения действительных чисел.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z = (x, y)$, где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. При таком определении сохраняются

переместительный и сочетательный законы сложения. Кроме того, существует единственное комплексное число $0 = (0, 0)$, которое в сумме с любым комплексным числом z равно этому числу z, т. е. $z + 0 = z$.

Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z = (x, y)$, где $x = x_1x_2 - y_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$. Такое определение произведения комплексных чисел приводит к выполнению переместительного $(z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1)$, сочетательного $(z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3)$ и распределительного $((z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3)$ законов.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ включается в множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, при этом действительное число x рассматривается как комплексное число, у которого мнимая часть равна нулю, т. е. $z = (x, 0)$. Умножение на действительную единицу $(1, 0)$ не меняет комплексное число, т. е. $z \cdot 1 = z$.

Комплексное число вида $z = (0, y)$, т. е. действительная часть которого равна нулю, называется чисто мнимым и символически обозначается $z = iy$. Это же чисто мнимое число можно рассматривать как произведение мнимой единицы $(0, 1)$ и действительного числа $(y, 0)$. Мнимую единицу принято обозначать символом $(0, 1) = i$. Исходя из определения произведения комплексных чисел легко проверяется справедливость соотношения $i \cdot i = i^2 = -1$. Это позволяет придать алгебраический смысл так называемой **алгебраической форме** представления комплексного числа

$$z = (x, y) = x + iy \tag{3.1}$$

и выполнять операции сложения и умножения комплексных чисел по обычным правилам алгебры многочленов.

Комплексное число $z = (x, -y) = x - iy$ называется комплексно сопряженным числу.

Операции вычитания и деления комплексных чисел определяются как операции обратные соответственно сложению и умножению комплексных чисел. Разностью комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется такое число $z = x + iy$, сумма которого с числом $z_2 = (x_2, y_2)$ равна числу $z_1 = (x_1, y_1)$, т. е. $z_2 + z = z_1$. Отсюда по правилу

сложения комплексных чисел получим, что $x_2 + x = x_1$, $y_2 + y = y_1$ и, следовательно, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$. Аналогично, частным комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2) \neq 0$ называется такое число $z = x + iy$, произведение которого на число $z_2 = (x_2, y_2)$ равно числу $z_1 = (x_1, y_1)$, т. е. $z_2 \cdot z = z_1$. Отсюда следует (в соответствии с определением произведения комплексных чисел), что действительная x и мнимая y части являются решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1, \\ y_2 x + x_2 y = y_1, \end{cases}$$

с определителем $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, отличным от нуля. В результате решения этой системы получим следующее выражение для частного двух комплексных чисел:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Так как комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение любого комплексного числа $z = x + iy$ точкой на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами (x, y). Числу $z = 0$ ставится в соответствие начало координат этой плоскости, называемой **комплексной плоскостью**, ось абсцисс — действительной, а ось ординат — мнимой осью комплексной плоскости. При этом между множеством комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством комплексных чисел и множеством свободных векторов с координатами (x, y) устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это соответствие позволяет представить комплексное число в другой форме, если для определения положения точки на плоскости воспользоваться полярными координатами (r, φ), где r — расстояние точки от начала координат, а φ — угол, который составляет

радиус-вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс. При этом за положительное направление изменения угла φ принято направление против часовой стрелки.

С учетом связи между декартовыми и полярными координатами ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) произвольное комплексное число $z = x + iy$ можно представить в так называемой **тригонометрической форме:**

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (3.2)$$

Переменная r называется **модулем**, а переменная φ — **аргументом** комплексного числа z, и они обозначаются соответственно $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Приведенные формулы позволяют выразить модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ через его действительную и мнимую части:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Значение φ из последнего уравнения определяется с учетом знаков x и y, а также с учетом того, что аргумент комплексного числа определен неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Поэтому в общем случае можно записать: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), где $\arg z$ есть значение аргумента комплексного числа, заключенное в промежутке длины 2π. Этот промежуток в общем случае имеет вид $[\varphi_0, 2\pi + \varphi_0)$, где φ_0 — произвольное число, выбранное в качестве начала отсчета значений аргумента комплексного числа. Обычно выбирают $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = -\pi$.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен, а модуль равен нулю.

Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой только тогда, когда равны их модули, а аргументы либо равны, либо отличаются на число, кратное 2π.

Кроме алгебраической и тригонометрической форм представления комплексного числа часто используется **показательная форма** его представления, которая получается из формулы (3.2), если воспользоваться следующей формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (3.3)$$

Из данного выше определения суммы и разности комплексных чисел и соответствия между множеством комплексных чисел и множеством векторов на плоскости следует, что сумма и разность комплексных чисел соответствуют сумме и разности векторов на плоскости, которым они соответствуют. При этом модуль разности комплексных чисел имеет геометрический смысл расстояния между точками комплексной плоскости, представляющими на ней эти числа.

Для комплексных чисел справедливы неравенства треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|.$$

Выполнение операции умножения комплексных чисел удобно проводить, представив их в тригонометрической форме. В этом случае справедливо следующее правило нахождения произведения $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 r^{i(\varphi 1 + \varphi 2)},$$

т. е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей: $r = r_1 \cdot r_2$, а аргумент — сумме аргументов сомножителей: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. При делении этих же комплексных чисел справедлива формула ($r_2 \neq 0$):

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

т. е. модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей: $|z| = r = r_1/r_2$, а аргумент частного — разности аргументов делимого и делителя:

$$\operatorname{Arg} z = \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Из приведенной выше формулы произведения комплексных чисел вытекает следующая формула Муавра для n-й (n — натуральное число) степени числа z:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \qquad (3.4)$$

3.4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, такое что $w^n = z$. Откуда получаются следующие формулы для модуля ρ и аргумента θ комплексного числа $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1), \tag{3.5}$$

где r и φ соответственно модуль и аргумент комплексного числа z.

Таким образом, для корня n-й степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ справедлива формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.6}$$

Примеры.

3.1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$.

Р е ш е н и е. В соответствии с определением суммы двух комплексных чисел для ее нахождения необходимо сложить действительные части слагаемых чисел, и этот результат сложения составит действительную часть суммы, и также сложить мнимые части слагаемых чисел, и этот результат составит мнимую часть суммы. Таким образом, имеем:

$$z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (3 - 4i) = (4 + 3) + (3 - 4)i = 7 - i.$$

Аналогично для нахождения разности двух комплексных чисел необходимо, в отличие от рассмотренного выше нахождения суммы комплексных чисел, найти не сумму соответствующих частей чисел z_1 и z_2, а их разность, т. е.

$$z_1 - z_2 = (4 + 3i) - (3 - 4i) = (4 - 3) + (3 - (-4))i = 1 + 7i.$$

Для нахождения произведения комплексных чисел z_1 и z_2, в соответствии с данным выше определением, достаточно выполнить умножение этих комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, по правилу умножения многочлена на многочлен, учитывая, что $i^2 = -1$.

Имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 3i)(3 - 4i) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot (-4i) + 3i \cdot 3 + 3i \cdot (-4i) = \\ = 12 - 16i + 9i - 12i^2 = 24 - 7i.$$

Для нахождения частного двух комплексных чисел z_1 и z_2, т. е. дроби z_1/z_2, необходимо, в соответствии с изложенным выше, умножить числитель и знаменатель искомого отношения чисел z_1 и z_2 на число, комплексно сопряженное делителю z_2, т. е. на число $\overline{z_2}$. Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3i}{3-4i} = \frac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}.$$

Произведение любого комплексного числа на комплексно сопряженное ему дает действительное число, равное квадрату модуля этого комплексного числа:

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

Таким образом, получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4+3i)(3+4i)}{3^3 + (-4)^2} = \frac{25i}{25} = i.$$

3.2. Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа, выбрав в качестве интервала изменения главного значения $\operatorname{Arg} z$, т. е. $\arg z$, сначала промежуток $[0, 2\pi)$, а затем $[-\pi, \pi)$: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$.

Р е ш е н и е. Найдем модуль комплексного числа z_1. Имеем: $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Найдем $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Для этого найдем сначала $\arg z$. По определению $\operatorname{tg} \arg z = \frac{y_1}{x_1}$. В нашем случае $x_1 = y_1 = 1$. Тогда $\operatorname{tg} \arg z = 1$. В обоих случаях выбора промежутка изменения $\arg z$ получим $\arg z = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (т. е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)},$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь число $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Имеем

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \ \operatorname{tg}\arg z = \frac{y_2}{x_2},$$

где $x_2 = 1$, $y_2 = -\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}\arg z = -\sqrt{3}$. Так как мнимая часть числа z_2 отрицательная, а действительная часть положительная, то точка комплексной плоскости, соответствующая числу z_2, находится в четвертой четверти. В первом случае выбора промежутка изменения $\arg z$ имеем $\arg z = \frac{5\pi}{3}$, во втором случае — $\arg z = -\frac{\pi}{3}$. Тогда в первом случае:

$$z_2 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)\right) = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)}, \ k \in \mathbb{Z};$$

во втором случае:

$$z_2 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для числа $z_3 = -1 + i$ имеем:

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \ \operatorname{tg}\arg z = \frac{y_3}{x_3} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Так как $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, то в обоих рассматриваемых случаях $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ и

$$z_3 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для числа $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$ модуль равен

$$|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2, \text{ а } \operatorname{tg}\arg z = \frac{y_4}{x_4} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Так как $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$, то в первом случае $\arg z = \frac{4\pi}{3}$, а во втором — $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$, и, таким образом, в первом случае получим:

$$z_4 = -1 - \sqrt{3}i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)},$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

а во втором случае:

$$z_4 = -1 - \sqrt{3}i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)},$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

3.5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

Последовательностью комплексных чисел называется бесконечное множество перенумерованных чисел, оно обозначается $\{z_n\}$.

Число $a = \alpha + i\beta$ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство: $|z_n - a| < \varepsilon$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае — расходящейся. Записывается это следующим образом:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = a. \tag{3.7}$$

Для того чтобы последовательность $\{z_n\}$ имела предел, равный $a = \alpha + i\beta$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\operatorname{Re} z_n = \alpha_n$, $\operatorname{Im} z_n = \beta_n$ сходились соответственно к α и β, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha, \tag{3.8}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \beta. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что свойства пределов последовательностей комплексных чисел, связанные с арифметическими операциями, аналогичны соответствующим свойствам последовательностей действительных чисел. Если существуют пределы последовательностей $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$, то существуют и пределы последовательностей $z_n \pm w_n$, $z_n \cdot w_n$, $\frac{z_n}{w_n}$ и справедливы равенства:

$$\lim_{n \to +\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n \to +\infty} z_n \pm \lim_{n \to +\infty} w_n, \tag{3.10}$$

$$\lim_{n \to +\infty}(z_n w_n) = \lim_{n \to +\infty} z_n \cdot \lim_{n \to +\infty} w_n, \tag{3.11}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} z_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n} \quad \left(\lim_{n \to +\infty} w_n \neq 0\right). \tag{3.12}$$

3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Говорят, что на множестве D точек комплексной плоскости z задана функция w комплексной переменной z, т. е. $w = f(z)$, если определен закон, в соответствии с которым каждой точке z множества D ставится в соответствие определенная точка или некоторая совокупность точек w. В первом случае функция $f(z)$ называется **однозначной**, во втором случае — **многозначной**. Множество D называется множеством определения функции $f(z)$ или множеством значений независимой переменной, а совокупность W всех значений, принимаемых функцией $f(z)$ на множестве D, — множеством ее изменения или множеством ее значений. Множества определения и множества значений $f(z)$ могут иметь разнообразную структуру. В теории функций комплексной переменной обычно рассматривают множества, представляющие собой области комплексной плоскости.

Множество D точек комплексной плоскости называется областью, если каждая точка множества D — внутренняя точка этого множества и если любые две точки этого множества можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат D.

В свою очередь точка z называется внутренней точкой множества D, если существует ε-окрестность точки z, все точки которой принадлежат множеству D; ε-окрестностью точки z_0 называется множество точек комплексной плоскости, которые лежат внутри окружности радиуса ε с центром в точке z_0: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Точка z называется граничной точкой области D, если в любой ее ε-окрестности содержатся точки, как принадлежащие D, так и не принадлежащие D. Совокупность всех граничных точек области D образует границу области D. Множество, получающееся присоединением к области D всех ее граничных точек, называется замкнутой областью и обозначается $\bar{D}$.

Точка z называется внешней точкой области D, если существует ε-окрестность этой точки, не содержащая точек области D.

Задание функции $w = f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных x и y: ее действительной — $\mathrm{Re}w = u(x, y)$ и мнимой — $\mathrm{Im}w = v(x, y)$ частей. Таким образом, можно записать:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{3.12}$$

Примеры.

3.3. Вычислить: а) $(1 + i)^{11}$, б) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{73}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим пункт а). Положим $1 + i = z_0$, тогда, по условию, необходимо возвести число z_0 в степень 11, что наиболее удобно сделать, если число z_0 будет представлено в тригонометрической или показательной форме. Выберем в качестве интервала изменения главного значения $\mathrm{Arg}\, z$, т. е. $\arg z$, промежуток $[0, 2\pi)$, тогда, применяя ранее показанный алгоритм, получим:

$$z_0 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Далее, с учетом формулы Муавра, имеем:

$$z_0^{11} = (1+i)^{11} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)\right)^{11} =$$

$$= 2^{\frac{11}{2}}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{4} + 22\pi k\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{4} + 22\pi k\right)\right) =$$

$$= 2^{\frac{11}{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 22\pi k\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 22\pi k\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Или если перевести в алгебраическую форму:

$$z_0^{11} = 2^{\frac{11}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^5(-1 + i) = -32 + 32i.$$

Производя то же самое в пункте б), только представляя число $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ в показательной форме и выбирая в качестве интервала изменения главного значения $\mathrm{Arg}\, z$, т. е. $\arg z$, промежуток $[-\pi, \pi)$, получим:

$$z_1^{73} = \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}\right)^{73} = 2^{73}e^{i\left(-\frac{73\pi}{3}+146\pi k\right)} = 2^{73}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+146\pi k\right)}.$$

Или если перевести в алгебраическую форму:

$$z_1^{73} = 2^{73}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+146\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+146\pi k\right)\right) =$$

$$= 2^{73}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{72}-2^{72}\sqrt{3}i = 2^{72}z_0.$$

Примечание. Можно действовать по-другому, скажем, если $n \in \mathbb{N}$ и $z = x + iy$, то, применяя формулу бинома Ньютона к числу z^n, получим:

$$z^n = (x+iy)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(iy)^k = \sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k x^{n-k}y^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3.4. Вычислить: а) $\sqrt[3]{1+i}$, б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.

Решение. Рассмотрим пункт а). Положим $1 + i = z_0$, тогда, по условию, необходимо найти корень третьей степени из числа z_0. Функция комплексного переменного $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{R}$ многозначна и в любой области D комплексной плоскости, не содержащей контуров, охватывающих точку $z = 0$, допускает выделение n однозначных ветвей. Исходя из этого, ввиду того что точку z_0 можно поместить в такую область, найдем все 3 значения $\sqrt[3]{z_0}$ (с точностью до $\operatorname{Arg} z$). Это удобно сделать, если число z_0 будет представлено, как и выше, в тригонометрической или показательной форме. Выберем в качестве интервала изменения главного значения $\operatorname{Arg} z$, т. е. $\arg z$, промежуток $[0, 2\pi)$ и, пользуясь результатами пункта а) примера 3.3, получим:

$$\sqrt[3]{z_0} = \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)} =$$

$$= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k+2\pi l\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k+2\pi l\right)\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, имеем:

$$\sqrt[3]{z_0}=\begin{cases}2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\pi l\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\pi l\right)\right), & k=0,\ l\in\mathbb{Z},\\ 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi l\right)+i\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi l\right)\right), & k=1,\ l\in\mathbb{Z},\\ 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}+2\pi l\right)+i\cos\left(\frac{17\pi}{12}+2\pi l\right)\right), & k=2,\ l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Производя то же самое в пункте б), получим:

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\pi k+2\pi l\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\pi k+2\pi l\right)\right),$$

$$k=0,1,2,3,\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Или, что то же самое:

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=\begin{cases}\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi l\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi l\right)\right), & k=0,\ l\in\mathbb{Z},\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi l\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi l\right)\right), & k=1,\ l\in\mathbb{Z},\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi l\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi l\right)\right), & k=2,\ l\in\mathbb{Z},\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi l\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi l\right)\right), & k=3,\ l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

3.5. Где расположены точки z, для которых:

а) $|z-2i|\geqslant 4$, б) $|z-1|-|z+3|>3$, в) $\left|\frac{z-1}{z+2}\right|\geqslant 1$, г) $\operatorname{Im} z\leqslant 3$,

д) $\frac{\pi}{6}<\arg(z+3i)<\frac{\pi}{2}$, е) $|z+2i|+|z-2i|=9$.

Р е ш е н и е.

а) Положим $z=x+iy$, тогда неравенство $|z-2i|\geqslant 4$, с учетом определения модуля комплексного числа z, перепишется в виде:

$$|z-2i|\geqslant 4\Leftrightarrow|x+iy-2i|\geqslant 4\Leftrightarrow|x+i(y-2)|\geqslant 4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}\geqslant 4.$$

Решим полученное алгебраическое неравенство:

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} \geqslant 4 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 \geqslant 16.$$

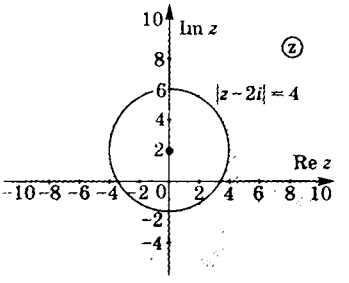

Рис. 3.1

Его решением будут все пары чисел (x, y), лежащие во внешности и на границе круга радиуса 4 с центром в точке $(0, 2)$.

С учетом того, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, получаем, что точки z, для которых $|z - 2i| \geqslant 4$, лежат во внешности и на границе круга радиуса 4 с центром в точке $z_0 = 2i$ (рис. 3.1, где штриховкой отмечена область $|z - 2i| > 4$, жирной черной линией показана окружность вида $|z - 2i| = 4$).

б) Положим $z = x + iy$, тогда неравенство $|z-1| - |z+3| > 3$, с учетом определения модуля комплексного числа z, перепишется в виде:

$$|z-1| - |z+3| > 3 \Leftrightarrow |x+iy-1| - |x+iy+3| > 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |(x-1)+iy| - |(x+3)+iy| > 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} - \sqrt{(x+3)^2+y^2} > 3.$$

Решим полученное алгебраическое неравенство:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} - \sqrt{(x+3)^2+y^2} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} >$$
$$> \sqrt{(x+3)^2+y^2} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} > \sqrt{(x+3)^2+y^2} + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2 > \left(\sqrt{(x+3)^2+y^2} + 3\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 > (x+3)^2+y^2+6\sqrt{(x+3)^2+y^2}+9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x-17 > 6\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x-17>0, \\ (-8x-17)^2 > \left(6\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{17}{8}, \\ 28x^2+56x-36y^2-35>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{17}{8}, \\ \dfrac{(x+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} > 1. \end{cases}$$

Выражение

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1$$

представляет собой каноническое уравнение гиперболы с асимптотами

$$y=\frac{\sqrt{7}}{2}(x+1),\quad y=-\frac{\sqrt{7}}{2}(x+1)$$

и вершинами в точках

$$x_1=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, решением будут все пары чисел (x, y), лежащие левее прямой $x=-\frac{17}{8}$ и левой ветви гиперболы

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1.$$

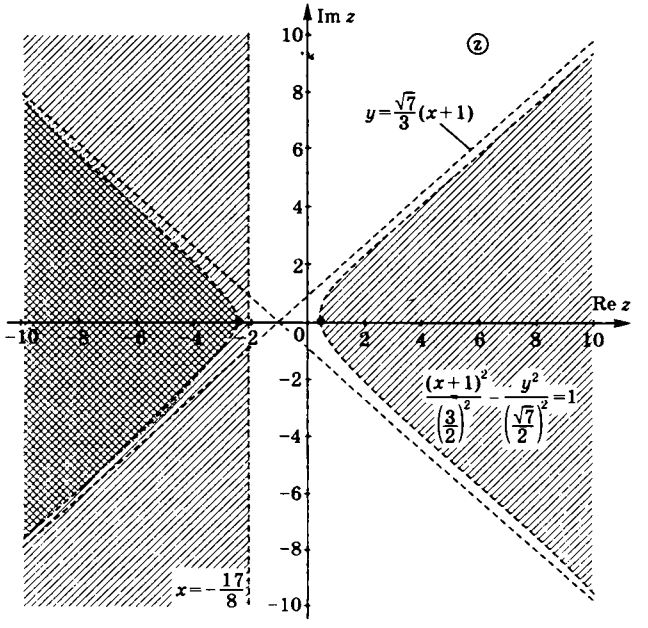

Рис. 3.2

Ясно, что точки, лежащие на гиперболе, не удовлетворяют рассматриваемому неравенству. На рис. 3.2 левой штриховкой отмечена область $x < -\frac{17}{8}$, правой —

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} > 1,$$

пунктирными линиями отмечены прямые $x = -\frac{17}{8}$ (участвует в образовании искомой области),

$$y = \frac{\sqrt{7}}{2}(x+1), \quad y = -\frac{\sqrt{7}}{2}(x+1)$$

и собственно гипербола

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$$

(представляет собой границу искомой области).

С учетом того, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, получаем, что точки z, для которых $|z-1| - |z+3| > 3$, лежат в найденной области комплексной плоскости.

в) Положив $z = x + iy$, перепишем неравенство $\left|\frac{z-1}{z+2}\right| \geqslant 1$ с учетом определения модуля комплексного числа z и его свойств:

$$\left|\frac{z-1}{z+2}\right| \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|z+2|} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+2)+iy|} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2} \geqslant \sqrt{(x+2)^2+y^2}, \\ (x+2)^2+y^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \geqslant (x+2)^2+y^2, \\ \begin{cases} x \neq 2, \\ y \neq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x-3 \geqslant 0, \\ \begin{cases} x \neq -2, \\ y \neq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x \neq -2, \\ y \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Следовательно, числа комплексной плоскости, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{z-1}{z+2}\right| \geqslant 1$, обладают тем свойством,

что их действительная часть $\operatorname{Re} z \leqslant -\frac{1}{2}$ (т. е. эти числа лежат левее или на прямой $x = -\frac{1}{2}$), при этом в этой области есть одна особая точка $z = -2$, в которой неравенство теряет смысл.

г) Решение данного примера, вспоминая результаты предыдущего, совсем легко найти — это будет область комплексной плоскости, числа в которой обладают тем свойством, что их мнимая часть $\operatorname{Im} z \leqslant 3$ (т. е. эти числа лежат ниже или на прямой $y = 3$).

д) Обозначим $z + 3i = t = u + iv$, тогда рассматриваемое неравенство перепишется в виде

$$\frac{\pi}{6} < \arg t < \frac{\pi}{2}.$$

Это неравенство задает множество точек комплексной плоскости, лежащих на дугах окружностей $r = r_0 > 0$, стягивающих прямые $u = v \operatorname{tan} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} v$ и $v = 0$ в области $\operatorname{Re} t = u > 0$ комплексной плоскости t, причем точки, лежащие на прямых, в искомое множество не входят.

Переходя из комплексной плоскости t к комплексной плоскости z (все точки рассматриваемого множества переносятся параллельным переносом вдоль мнимой оси на величину $-3i$), мы получим, что искомое множество точек комплексной плоскости z представляет собой дуги окружностей $\rho = \rho_0 > 0$, стягивающих прямые $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 3$ и $x = 0$ в области $\operatorname{Re} z = x > 0$ комплексной плоскости z, причем точки, лежащие на прямых, в искомое множество не входят (рис. 3.3).

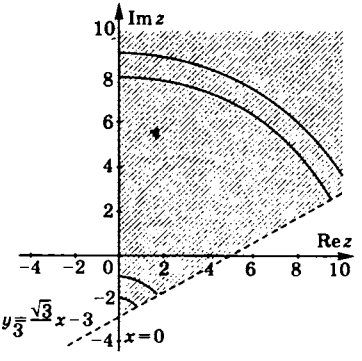

Рис. 3.3

е) Положив $z = x + iy$, перепишем равенство $|z + 2i| + |z - 2i| = 9$ с учетом определения модуля комплексного числа z:

$$|z+2i|+|z-2i|=9 \Leftrightarrow |x+(y+2)i|+|x+(y-2)i|=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=9.$$

Перейдем в полярную систему координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Имеем:

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi+2)^2}+\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi-2)^2}=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\rho^2+4\rho\sin\varphi+4}+\sqrt{\rho^2-4\rho\sin\varphi+4}=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\rho^2+2\sqrt{(\rho^2+4)^2-16\rho^2\sin^2\varphi}=73 \Leftrightarrow \frac{73}{2}-\rho^2=$$
$$=\sqrt{(\rho^2+4)^2-16\rho^2\sin^2\varphi} \Leftrightarrow \left(\frac{73}{2}-\rho^2\right)^2=$$
$$=(\rho^2+4)^2-16\rho^2\sin^2\varphi \Leftrightarrow \frac{81}{4}(65-4\rho^2)+16\rho^2\sin^2\varphi=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{81}{4}\left(65-4\rho^2+\frac{64}{81}\rho^2\sin^2\varphi\right)=0 \Leftrightarrow 65-4\rho^2+\frac{64}{81}\rho^2\sin^2\varphi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 65-4\rho^2+\frac{64}{81}\rho^2\sin^2\varphi \Leftrightarrow 65-4x^2-4y^2+\frac{64}{81}y^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 65-4x^2-\frac{260}{81}y^2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{9}}{2}\right)^2}=1.$$

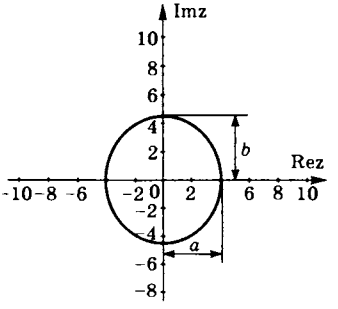

Рис. 3.4

Отсюда видно, что числа комплексной плоскости, удовлетворяющие равенству $|z + 2i| + |z - 2i| = 9$, лежат на эллипсе с центром симметрии в точке $z = 0$, с осями $a = \frac{\sqrt{65}}{2}$ и $b = \frac{9}{2}$ (рис. 3.4).

3.6. Найти отображение окружности $x^2 + y^2 = 4$ на плоскость Ouv с помощью функции $w = 3z + 2$.

Р е ш е н и е. Функция $w = 3z + 2$ отображает окружности с центром $z = 0$ в окружности с центром $w = 0$; прямые, проходящие через точку $z = 0$, — в прямые, проходящие через точку $w = 0$, действительно:

$$w = 3z + 2 = 3\rho e^{i\varphi} + 2 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 = \text{const}, \\ \quad w = \rho_0 e^{i\varphi} + 2, \ |w| = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 = \text{const}, \\ \quad w = \rho e^{i\varphi_0} + 2, \ \arg w = \text{const}. \end{cases}$$

Отображение $w = 3z + 2$ производит следующую последовательность действий:

1) увеличивает модуль комплексного числа z в три раза, сохраняя $\arg z$;

2) сдвигает полученную в ходе пункта 1) точку комплексной плоскости на 2 единицы вправо вдоль действительной оси $\mathrm{Re}\, z$.

На рис. 3.5 изображена окружность $x^2 + y^2 = 4$ и ее отображение функцией w (для точки $z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ стрелками указана последовательность отображения

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}i = z_0 \xrightarrow{w} 3z_0 + 2 = 3\sqrt{2} + 2 + 3\sqrt{2}i;$$

начала систем координат совмещены, масштабы осей одинаковы):

$$x^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{w} (x - 2)^2 + y^2 = 36.$$

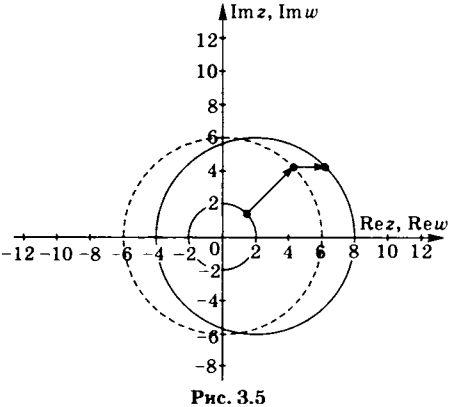

Рис. 3.5

3.7. При помощи функции $w = z^2$ отобразить на плоскость Ouv прямые $x = 3$ и $y = 2$.

Р е ш е н и е. Функция $w = z^2$ отображает окружности с центром $z = 0$ в окружности с центром $w = 0$; прямые, проходящие через точку $z = 0$, — в прямые, проходящие через точку $w = 0$, действительно:

$$w = z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 = \text{const}, & w = \rho_0^2 e^{2i\varphi}, \ |w| = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 = \text{const}, & w = \rho^2 e^{i\varphi_0}, \ \arg w = \text{const}. \end{cases}$$

Узнаем, как выглядят образы прямых $x = x_0$ и $y = y_0$ при отображении w. Исходя из правила возведения комплексного числа в натуральную степень, заключаем, что:

$$w^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv.$$

Запишем параметрические уравнения образов прямых $x = x_0$ и $y = y_0$, произведенных отображением w на плоскости Ouv:

$$x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \overset{w}{\rightarrow} \begin{cases} u = x_0^2 - t^2; \\ v = 2x_0 t; \end{cases}$$

$$y = y_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \overset{w}{\rightarrow} \begin{cases} u = t^2 - y_0^2; \\ v = 2y_0 t. \end{cases}$$

Если перейти к явному представлению, то получим:

$$x = x_0 \overset{w}{\rightarrow} u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2};$$

$$y = y_0 \overset{w}{\rightarrow} u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2.$$

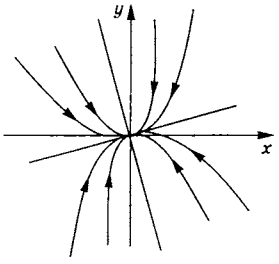

Рис. 3.6

Замечая, что $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, окончательно имеем:

$$x = 3 \overset{w}{\rightarrow} u = 9 - \frac{v^2}{36};$$

$$y = 2 \overset{w}{\rightarrow} u = \frac{v^2}{16} - 4.$$

Образы прямых $x = 3$, $y = 2$ показаны на рис. 3.6.

3.6.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Число $A = \alpha + i\beta$ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех значений z из области определения $f(z)$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, справедливо неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. Это определение предела функции комплексной переменной аналогично определению предела функции действительной переменной по Коши. Можно дать и другое, эквивалентное данному, определение предела функции комплексной переменной $f(z)$, аналогичное определению предела функции одной переменной по Гейне: число $A = \alpha + i\beta$ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой, сходящейся к z_0 последовательности точек $\{z_n\}$ $(z_n \neq z_0)$, соответствующая ей последовательность значений функции $f(z_n)$ имеет единственный предел, равный A. Это записывается следующим образом:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A. \tag{3.13}$$

Предел функции комплексной переменной обладает теми же свойствами, что и предел функции одной и нескольких переменных: если в точке z_0 существуют

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \quad \text{и} \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = B,$$

то в точке z_0 существуют и пределы функций $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, $f(z)/g(z)$ $(B \neq 0)$, причем:

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z), \tag{3.14}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z), \tag{3.15}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}. \tag{3.16}$$

В частности, так как предел постоянной C равен самой постоянной C, т. е. $\lim\limits_{z \to z_0} C = C$, то из (3.15) следует, при $g(z)$, что $\lim\limits_{z \to z_0} Cf(z) = C \cdot \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Для того чтобы $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имела в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ предел, равный $A = \alpha + i\beta$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали пределы:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \tag{3.17}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta. \tag{3.18}$$

Напомним, что, как и в случае функций нескольких переменных, предел функции комплексной переменной существует только в том случае, если результат предельного перехода в (3.13), а значит и в (3.17), (3.18), не зависит от пути (способа) предельного перехода в точку z_0, а для (3.17), (3.18) в точку $M_0(x_0, y_0)$.

Примеры.

3.8. Доказать, используя определение предела последовательности комплексных чисел, что:

а) $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^a + in^b}{n^b + in^a} = \begin{cases} 1, & a = b; \\ i, & a < b; \\ -i, & a > b, \end{cases}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\sqrt{2}\alpha n^3 + an^2 + bn + c\right) + i\left(\sqrt{2}\beta n^3 + dn^2 + en + f\right)}{\left|n\sqrt{n} - in\sqrt{n^4 - n}\right| + i\left|n\sqrt{n} + in\sqrt{n^4 - n}\right|} = \alpha + i\beta,$$

где α, β, a, b, c, d, e, f — любые комплексные числа.

Р е ш е н и е.

а) Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и оценим разность $|z_n - a|$ для рассматриваемой последовательности в трех случаях ($a = b$, $a < b$, $a > b$):

1-й вариант — $a = b$:

$$|z_n - a| = \left|\frac{n^a + in^b}{n^b + in^a} - 1\right| \underset{a=b}{=} |1 - 1| = 0 < \varepsilon, \text{ т. е. } |z_n - a| < \varepsilon$$

для любого $n > N$, где $N = 0$;

2-й вариант — $a < b$:

$$|z_n - a| = \left|\frac{n^a + in^b}{n^b + in^a} - i\right| = \left|\frac{(n^a + in^b)(n^b - in^a)}{(n^b + in^a)(n^b - in^a)} - i\right| =$$

$$= \left|\frac{2n^{a+b}}{n^{2b} + n^{2a}} + i\left(\frac{n^{2b} - n^{2a}}{n^{2b} + n^{2a}} - 1\right)\right| = \left|\frac{2n^{a-b}}{n^{2b} + n^{2a}} + i\frac{-2n^{2a}}{n^{2b} + n^{2a}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2n^{a+b}}{n^{2b} + n^{2a}} + \frac{2n^{2a}}{n^{2b} + n^{2a}} = \frac{2(n^{a+b} + n^{2a})}{n^{2b} + n^{2a}} = \frac{2(n^{a-b} + n^{2a-2b})}{1 + n^{2a-2b}}.$$

Решим неравенство (с учетом того, что число ε положительно и сколь угодно мало):

$$\frac{2(n^{a-b} + n^{2a-2b})}{1 + n^{2a-2b}} < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t + t^2}{1 + t^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ n^{a-b} = t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \varepsilon)t^2 + 2t - \varepsilon < 0, \\ n^{a-b} = t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left(-\infty, \dfrac{1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon - 2}\right) \cup \left(\dfrac{1 - \sqrt{1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon - 2}\right), \\ n^{a-b} = t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon - 2}\right)^{\frac{1}{a-b}} = \sigma.$$

Взяв $N(\varepsilon) = [\sigma]$[1], получим, что $|z_n - a| < \varepsilon$, как только $n > N(\varepsilon) = [\sigma]$;

3-й вариант — $a > b$:

$$|z_n - a| = \left|\frac{n^a + in^b}{n^b + in^a} - (-i)\right| = \left|\frac{2n^{a+b}}{n^{2b} + n^{2a}} + i\left(\frac{n^{2b} - n^{2a}}{n^{2b} + n^{2a}} + 1\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{2n^{a+b}}{n^{2b} + n^{2a}} + i\frac{2n^{2b}}{n^{2b} + n^{2a}}\right| \leqslant \frac{2n^{a+b}}{n^{2b} + n^{2a}} + \frac{2n^{2b}}{n^{2b} + n^{2a}} =$$

$$= \frac{2(n^{a+b} + n^{2b})}{n^{2b} + n^{2a}} = \frac{2(n^{b-a} + n^{2b-2a})}{1 + n^{2b-2a}}.$$

Решим неравенство (с учетом сказанного выше относительно числа ε):

---

[1] $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, например: $[1{,}023] = 1$, $[0{,}023] = 0$ и т. д.

$$\frac{2(n^{b-a}+n^{2b-2a})}{1+n^{2b-2a}}<\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t+t^2}{1+t^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}, \\ n^{b-a}=t>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n>\left(\frac{1-\sqrt{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon-2}\right)^{\frac{1}{b-a}}=\chi.$$

Взяв $N(\varepsilon)=[\chi]$, получим, что $|z_n-a|<\varepsilon$, как только $n>N(\varepsilon)=[\chi]$.

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a+in^b}{n^b+in^a}=\begin{cases}1, & a=b;\\ i, & a<b;\\ -i, & a>b,\end{cases}$

где $a, b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

б) Упростим предварительно вид n-го члена рассматриваемой последовательности. Исходя из определения модуля комплексного числа z, имеем (учитывая то, что $n\in\mathbb{N}$):

$$\left\|n\sqrt{n}-in\sqrt{n^4-n}\right|+i\left|n\sqrt{n}+in\sqrt{n^4-n}\right\|=$$

$$=\left|\sqrt{\left(n\sqrt{n}\right)^2+\left(n\sqrt{n^4-n}\right)^2}+i\sqrt{\left(n\sqrt{n}\right)^2+\left(n\sqrt{n^4-n}\right)^2}\right|=$$

$$=\sqrt{n^3+n^2(n^4-n)}\,|1+i|=\sqrt{n^6}\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}n^3.$$

Таким образом, имеем:

$$z_n=\left(\alpha+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)+i\left(\beta+\frac{d}{n}+\frac{e}{n^2}+\frac{f}{n^3}\right).$$

Зададимся, как и выше, числом $\varepsilon>0$ и оценим разность $|z_n-a|$ для рассматриваемой последовательности при $\alpha, \beta, a, b, c, d, e, f\in\mathbb{C}$:

$$|z_n-a|=\left|\left(\alpha+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)+i\left(\beta+\frac{d}{n}+\frac{e}{n^2}+\frac{f}{n^3}\right)-(\alpha+i\beta)\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)+i\left(\frac{d}{n}+\frac{e}{n^2}+\frac{f}{n^3}\right)\right|\leqslant\frac{|a|+|d|}{n}+\frac{|b|+|e|}{n^2}+\frac{|c|+|f|}{n^3}.$$

Положим $\gamma=\max\{|a|+|d|, |b|+|e|, |c|+|f|\}$, тогда, очевидно, верно неравенство:

$$|z_n - a| \leqslant \frac{|a|+|d|}{n} + \frac{|b|+|e|}{n^2} + \frac{|c|+|f|}{n^3} \leqslant \gamma \frac{n^2+n+1}{n^3}.$$

Ввиду того что $n^2 \geqslant n \geqslant 1$ при $n \in \mathbb{N}$, имеем:

$$|z_n - a| \leqslant \gamma \frac{n^2+n+1}{n^3} \leqslant \frac{3\gamma n^2}{n^3} = \frac{3\gamma}{n}.$$

Решением неравенства $\frac{3\gamma}{n} < \varepsilon$ служат $n > \frac{3\gamma}{\varepsilon}$. Выбрав за $N(\varepsilon) = \left[\frac{3\gamma}{\varepsilon}\right]$, получим, что: $|z_n - a| < \varepsilon$ при $\forall n > N(\varepsilon)$, что доказывает условие задачи.

3.9. Найти пределы следующих последовательностей:

а) $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{3+4i}{7}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

б) $\{a_n\} = \left\{\frac{(1+i)^n}{2+(1+i)^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

в) $\{a_n\} = \left\{\left|\frac{z^n}{z^n}\right| \frac{(\cos i - i\sin i)^n}{(\cos i + i\sin i)^n} - 2\operatorname{ch} 2n\right\},\ z \neq 0+0i.$

Р е ш е н и е.

а) Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Очевидно, ее k-й член может быть представлен следующим образом:

$$a_k = \left(\frac{3+4i}{7}\right)^k = \frac{(3+4i)^k}{7^k} = \frac{\left(5e^{i\operatorname{arctg}\frac{4}{5}}\right)^k}{7^k} = \frac{5^k}{7^k} e^{ik\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}.$$

Непосредственно отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и номера $k > [\log_{\frac{5}{7}} \varepsilon] = N(\varepsilon)$ выполнено соотношение

$$|a_k| = \left|\frac{5^k}{7^k} e^{ik\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}\right| = \left(\frac{5}{7}\right)^k < \varepsilon,$$

которое, по определению предела последовательности комплексных чисел, означает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

б) Найдем предел последовательности $\{a_n\}$. Для ее k-го члена справедливы равенства:

$$\frac{(1+i)^k}{2+(1+i)^k}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^k}{2+\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^k}=\frac{\sqrt{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}+i\sqrt{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}}{2+\sqrt{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}+i\sqrt{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}+i\sqrt{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}\right)\left(2+\sqrt{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}-i\sqrt{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}\right)}{\left(2+\sqrt{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}+i\sqrt{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}\right)\left(2+\sqrt{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}-i\sqrt{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{2^{\frac{k}{2}+1}\cos\frac{k\pi}{4}+2^k+i2^{\frac{k}{2}+1}\sin\frac{k\pi}{4}}{4+2^{\frac{k}{2}+1}\cos\frac{k\pi}{4}+2^k}=$$

$$=\frac{2^{\frac{k}{2}+1}\cos\frac{k\pi}{4}+2^k}{4+2^{\frac{k}{2}+1}\cos\frac{k\pi}{4}+2^k}+i\frac{2^{\frac{k}{2}+1}\sin\frac{k\pi}{4}}{4+2^{\frac{k}{2}+1}\cos\frac{k\pi}{4}+2^k}.$$

Последовательность $\{a_n\}$ будет сходиться к своему пределу $a=\alpha+i\beta$, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{Re}a_n=\alpha$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{Im}a_n=\beta$, найдем их:

$$\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Re}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}+2^n}{4+2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}+2^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\left(2^{1-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+1\right)}{2^n\left(2^{2-n}+2^{1-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+1\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{2^{1-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+1\right\}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{2^{2-n}+2^{1-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+1\right\}}=\frac{1}{1}=1;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Im}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{n\pi}{4}}{4+2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}+2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{1-\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{2-n}+2^{1-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+1}=0.$$

Таким образом, ввиду того что

$$\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Re}a_n=1,\ \text{а}\ \lim_{n\to+\infty}\operatorname{Im}a_n=0,$$

заключаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

в) Определим предел последовательности $\{a_n\}$. Для ее k-го члена справедливы равенства:

$$\left|\frac{z^k}{\overline{z^k}}\right|\frac{(\cos i - i\sin i)^n}{(\cos i + i\sin i)^n} - 2\operatorname{ch}2n = \left|\frac{z^{2k}}{\overline{z^k}z^k}\right|\frac{(\cos(-i)+i\sin(-i))^n}{(\cos i + i\sin i)^n} -$$

$$- e^{2n} - e^{-2n} = \left|\frac{z^{2k}}{|z^k|^2}\right|\frac{(e^{i\cdot(-i)})^n}{(e^{i\cdot i})^n} - e^{2n} - e^{-2n} =$$

$$= \frac{|z^{2k}|}{||z|^{2k}|}\frac{e^n}{e^{-n}} - e^{2n} - e^{-2n} = \frac{|z|^{2k}}{|z|^{2k}}e^{2n} - e^{2n} - e^{-2n} = -e^{-2n}.$$

Таким образом, ясно, что:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left\{\left|\frac{z^k}{\overline{z^k}}\right|\frac{(\cos i - i\sin i)^n}{(\cos i + i\sin i)^n} - 2\operatorname{ch}2n\right\} = -\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0.$$

3.6.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 области ее определения D, если в этой точке существует предел функции $f(z)$, равный ее значению $f(z_0)$ в этой точке, т. е.:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{3.19}$$

На языке ε–δ непрерывность $f(z)$ в точке z_0 означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех z из области определения $f(z)$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется условие $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была непрерывной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы в точке $M_0(x_0, y_0)$ были непрерывны функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, т. е. выполнялись условия:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \tag{3.20}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0). \tag{3.21}$$

Это позволяет распространить на функции комплексной переменной свойства действительных функций двух переменных: если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке z_0, то в этой точке непрерывны их сумма $f(z) + g(z)$, произведение $f(z) \cdot g(z)$ и частное $f(z)/g(z)$ $(g(z_0) \neq 0)$.

3.7. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть однозначная функция комплексной переменной $w = f(z)$ определена в области D. Если в точке $z_0 \in D$ существует при $\Delta z \to 0$ предел отношения

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 по комплексной переменной z и обозначается $f'(z_0)$. Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{3.22}$$

Функция $f(z)$ в этом случае называется дифференцируемой в точке z_0.

Так как производная функции комплексной переменной есть предел приведенного выше разностного отношения, то, согласно данному выше определению предела, результат предельного перехода не должен зависеть от пути, по которому осуществляется этот переход в комплексной плоскости. Это накладывает дополнительные условия на поведение действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей функции $f(z)$ в окрестности точки z. Эти условия называются условиями Коши–Римана.

Условия Коши–Римана. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в этой точке (x_0, y_0) существуют частные производные действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей функции $f(z)$ по переменным x, y и выполняются условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{3.24}$$

Условия Коши–Римана при дополнительном условии дифференцируемости действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей функции $f(z)$ в точке (x_0, y_0) являются достаточными для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Если функция $f(z)$ дифференцируема в каждой точке некоторой области D, то функция $f(z)$ называется **аналитической** в области D.

Понятие аналитической функции комплексной переменной является основным понятием теории функций комплексной переменной.

Действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической в области D функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в той же области являются решениями уравнения Лапласа, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

и называются сопряженными гармоническими функциями. Это следует из условий Коши–Римана (3.23), (3.24), записанных для произвольной точки $z = x + iy$, если их продифференцировать по переменной x и затем сложить и то же самое выполнить по переменной y.

Если действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $f(z)$ рассматривать не как функции переменных x и y, а как функции переменных r и φ, где r и φ — полярные координаты точки (x, y), то условия Коши–Римана примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \varphi), \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \varphi) = -\frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi). \tag{3.26}$$

Кроме того, так как функцию $w = f(z)$ можно представить в показательной форме

$$f(z) = |f(z)| \exp(i \operatorname{Arg} f(z)), \tag{3.27}$$

то условия Коши–Римана в этом случае имеют вид:

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} = |f(z)| \frac{\partial \operatorname{Arg} f(z)}{\partial y}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = -|f(z)| \frac{\partial \operatorname{Arg} f(z)}{\partial x}. \tag{3.29}$$

С учетом условий Коши–Римана производная функции комплексной переменной $f(z)$ может быть представлена в одной из следующих форм:

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \\ = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{3.30}$$

Так как свойства алгебраических действий и предельного перехода, имеющие место для функций действительных переменных, сохраняются и при переходе к функциям комплексной переменной, то сохраняются и соответствующие правила дифференцирования, справедливость которых основана только на упомянутых свойствах (предполагается, что производные в левых и правых частях существуют):

$$\begin{aligned} &(f(z)+g(z))' = f'(z)+g'(z), \\ &(f(z)\cdot g(z))' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z), \\ &\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}, \\ &(f[g(z)])' = f'_g[g(z)]g'(z), \\ &f'(z) = \frac{1}{g'(w)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

(в последней формуле f и g есть взаимообратные функции, которые осуществляют однолистные отображения соответственно точек z и w).

3.8. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

К элементарным функциям комплексной переменной относятся следующие функции, являющиеся естественным распространением в комплексную область обычных для анализа элементарных функций:

$w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ — аналитическая функция во всей комплексной плоскости;

$w = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$ — n-значная, согласно (3.6), при $z \neq 0$ функция; в любой области $D \subset \mathbb{C}$, которая не содержит ни одной замкнутой кривой, обходящей точку $z = 0$, можно выделить n непрерывных и однозначных функций, принимающих каждая одно из значений $\sqrt[n]{z}$ по формуле (3.6). Эти функции называются **ветвями** многозначной функции $\sqrt[n]{z}$. Каждая из ветвей — аналитическая в области D функция;

$w = e^z$ — показательная функция, определяется для любого комплексного числа $z = x + iy$ соотношением $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ — аналитическая функция во всей комплексной плоскости; периодическая с чисто мнимым основным периодом $2\pi i$, т. е. $e^{2\pi ik} = 1$; сохраняется основное свойство показательной функции

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

$w = \operatorname{Ln} z$ — логарифмическая функция, определяется как функция, обратная показательной функции, т. е. $w = \operatorname{Ln} z$, если $e^w = z$, отсюда следует, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = \mathbb{Z}.$$

Символом $\ln z$ обозначается одно из значений бесконечнозначной функции $\operatorname{Ln} z$: $\ln z = ln|z| + i \arg z$. В любой области D, которая не содержит замкнутых кривых, обходящих точку $z = 0$, можно выделить бесчисленное множество непрерывных, однозначных ветвей многозначной функции $w = \operatorname{Ln} z$, значения которых в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемым $2\pi i$. Каждая ветвь — аналитическая функция в области D.

Тригонометрические функции комплексной переменной определяются $\forall z \in \mathbb{C}$ следующими формулами:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

— всюду аналитические и подчиняются обычным тригонометрическим соотношениям;

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

— также аналитические всюду, кроме точек, где знаменатели приведенных формул обращаются в нуль.

Гиперболические функции определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями комплексной переменной определяется следующими формулами, вытекающими из определения этих функций:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \cos z = \operatorname{ch} iz, \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \operatorname{ch} z = \cos iz,$$
$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \operatorname{cth} z = -i \operatorname{ctg} iz, \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \operatorname{ctg} z = -i \operatorname{cth} iz.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции определяются как функции, обратные соответствующим тригонометрическим и гиперболическим функциям. Так как тригонометрические и гиперболические функции выражаются через показательную функцию, то обратные функции можно выразить через логарифмическую функцию:

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arch} z = -\operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Общая степенная функция $w = z^a$, z — комплексная переменная, $a = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число. Так как $z = e^{\operatorname{Ln} z}$, то $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$. Полагая $z = re^{i\varphi}$, с учетом

определения логарифмической функции, получим следующее выражение для $w = z^a$: $w = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} e^{i[\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r]}$, где k — произвольное целое число. При $\beta \neq 0$ функция $w = z^a$ имеет бесконечно много значений, лежащих на окружностях $|w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}$ (при фиксированных z и a), аргументы этих значений равны $\operatorname{Arg} w = \alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r$.

Общая показательная функция $w = a^z$, z — комплексная переменная, $a = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число. По определению $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, откуда с учетом определения логарифмической функции получим следующее выражение для функции $w = a^z$: $a^z = e^{z \ln|a| + iz(\arg a + 2k\pi)}$. Функция $w = a^z$ представляет собой совокупность отдельных однозначных функций, отличающихся одна от другой множителями $e^{i2k\pi}$, где k — целое число.

Производные элементарных функций комплексной переменной z^n, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ и обратных тригонометрических и гиперболических функций находятся по тем же формулам, что и для функций действительной переменной:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (e^z)' = e^z, \quad (\ln z)' = \frac{1}{z},$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad (\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad (\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1 + z^2},$$

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}, \quad (\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}, \quad (\operatorname{arcctg} z)' = -\frac{1}{1 + z^2}.$$

Примеры.

3.10. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{z \to 1-i} \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z - 1 + i}$;

б) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z} \left\{ \sqrt{z + i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \right\}$;

в) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin 3z}{z}$;

г) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0}$, $z_0 \neq 0 + 0i$.

Решение.

а) $$\lim_{z\to 1-i}\frac{z^2-2z+2}{z-1+i}=\lim_{z\to 1-i}\frac{(z-1)^2+1}{z-1+i}=\lim_{z\to 1-i}\frac{(z-1+i)(z-1-i)}{z-1+i}=$$
$$=\lim_{z\to 1-i}(z-1-i)=-2i.$$

б) Представим комплексное число z в виде $z=re^{i\varphi}$, где $r=|z|\in\mathbb{R}$, $\varphi=\arg z\in[0,\,2\pi)$, тогда, если рассматриваемый предел существует, то он не зависит от того, как z стремится к 0, т. е. если для любого φ этот предел должен быть одинаков, это означает, что условие $z\to 0$ эквивалентно условию $r\to 0$ в данном примере, а значит, верно равенство:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left\{\sqrt{z+i}-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{re^{i\varphi}}\left\{\sqrt{re^{i\varphi}+i}-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}.$$

Будем вычислять последний предел, имеем:

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{re^{i\varphi}+i}-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}{re^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{re^{i\varphi}+e^{i\frac{\pi}{2}}}-e^{i\frac{\pi}{4}}}{r}=$$
$$=e^{-i\varphi}\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{r\cos\varphi+i(r\sin\varphi+1)}-e^{i\frac{\pi}{4}}}{r}=$$
$$=e^{-i\varphi}\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{\sqrt{r^2\cos^2\varphi+(r\sin\varphi+1)^2}\,e^{i\arg(re^{i\varphi}+i)}}-e^{i\frac{\pi}{4}}}{r}=$$
$$=e^{-i\varphi}\left[\lim_{r\to 0}\frac{\left\{\sqrt[4]{r^2+2r\sin\varphi+1}\cos\arg(re^{i\varphi}+i)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}}{r}+\right.$$
$$\left.+i\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt[4]{r^2+2r\sin\varphi+1}\sin\arg(re^{i\varphi}+i)-\sin\frac{\pi}{4}}{r}\right]=e^{-i\varphi}[L_1+iL_2].$$

Легко видеть, что каждый из пределов L_1 и L_2 обращается в бесконечность (первый в $-\infty$, второй в $+\infty$), а значит, исходный предел также обращается в бесконечность, т. е.

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left\{\sqrt{z+i}-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}=(-\infty)+i(+\infty).$$

в) Полагая $z = re^{i\varphi}$ и производя рассуждения, аналогичные пункту б), заключаем, что:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin 3z}{z} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin(3r\cos\varphi + i3r\sin\varphi)}{re^{i\varphi}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\sin(3r\cos\varphi)\operatorname{ch}(3r\sin\varphi) + i\cos(3r\cos\varphi)\operatorname{sh}(3r\sin\varphi)}{re^{i\varphi}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2(3r\cos\varphi)\operatorname{ch}^2(3r\sin\varphi) + \cos^2(3r\cos\varphi)\operatorname{sh}^2(3r\sin\varphi)}\,e^{i\arg 3re^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}}.$$

С учетом того, что $\arg 3re^{i\varphi} = \varphi$, получаем:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin 3z}{z} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2(3r\cos\varphi)\operatorname{ch}^2(3r\sin\varphi) + \cos^2(3r\cos\varphi)\operatorname{sh}^2(3r\sin\varphi)}}{r} =$$

$$= \sqrt{\lim_{r\to 0}\frac{\sin^2(3r\cos\varphi)\operatorname{ch}^2(3r\sin\varphi)}{r^2} + \lim_{r\to 0}\frac{\cos^2(3r\cos\varphi)\operatorname{sh}^2(3r\sin\varphi)}{r^2}} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2\varphi \lim_{r\to 0}\frac{\sin^2(3r\cos\varphi)}{9r^2\cos^2\varphi} + \lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2(3r\sin\varphi)}{r^2}} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2\varphi + \lim_{r\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(e^{3r\sin\varphi} - e^{-3r\sin\varphi}\right)\right)^2}{r^2}} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\frac{((1+3r\sin\varphi) - (1-3r\sin\varphi))^2}{r^2}} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\frac{36r^2\sin^2\varphi}{r^2}} = \sqrt{9\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi} = \sqrt{9} = 3.$$

г) Произведем замену вида $\Delta z = z - z_0$, тогда

$$\frac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0} = \frac{\ln(z_0 + \Delta z) - \ln z_0}{\Delta z},$$

при этом если $z \to z_0$, то, очевидно, $\Delta z \to 0$, таким образом, исходя из определения производной функции комплексного переменного в точке, имеем:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\ln(z_0 + \Delta z) - \ln z_0}{\Delta z} = \left\{\frac{d\ln z}{dz}\right\}\Bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{z_0}.$$

Покажем, что это равенство верно, аналитически:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\ln z-\ln z_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\ln|z|+i\arg z-\ln|z_0|-i\arg z_0}{z-z_0}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+i\arg\frac{z}{z_0}\right)(\overline{z}-\overline{z_0})}{(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})}=\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+i\arg\frac{z}{z_0}\right)(\overline{z}-\overline{z_0})}{|z-z_0|^2}.$$

Положим $z=re^{i\varphi}$ и $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$, тогда условию $z\to z_0$ будет соответствовать условие

$$\begin{cases}r\to r_0,\\ \varphi\to\varphi_0+0\end{cases}$$

(ввиду того, что в качестве интервала изменения главного значения $\operatorname{Arg}z$, т. е. $\arg z$, рассматривается промежуток $[0,\,2\pi)$), получим:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|+i\arg\frac{z}{z_0}\right)(\overline{z}-\overline{z_0})}{|z-z_0|^2}=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{\left(\ln\left|\frac{re^{i\varphi}}{r_0e^{i\varphi_0}}\right|+i\arg\frac{re^{i\varphi}}{r_0e^{i\varphi_0}}\right)\left(\overline{re^{i\varphi}}-\overline{r_0e^{i\varphi_0}}\right)}{|re^{i\varphi}-r_0e^{i\varphi_0}|^2}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{\left(\ln\frac{r}{r_0}+\ln|e^{i(\varphi-\varphi_0)}|+i(\varphi-\varphi_0)\right)(re^{-i\varphi}-r_0e^{-i\varphi_0})}{|\{r\cos\varphi-r_0\cos\varphi_0\}+i\{r\sin\varphi-r_0\sin\varphi_0\}|^2}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{\left(\ln\frac{r}{r_0}+i(\varphi-\varphi_0)\right)\frac{re^{i\varphi_0}-r_0e^{i\varphi}}{e^{i(\varphi+\varphi_0)}}}{\{r\cos\varphi-r_0\cos\varphi_0{}^2\}+\{r\sin\varphi-r_0\sin\varphi_0\}^2}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{e^{-i(\varphi+\varphi_0)}\left(\ln\frac{r}{r_0}+i(\varphi-\varphi_0)\right)(re^{i\varphi_0}-r_0e^{i\varphi})}{r^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{e^{-i(\varphi+\varphi_0)}\left(\ln\frac{r}{r_0}+i(\varphi-\varphi_0)\right)(\{r\cos\varphi_0-r_0\cos\varphi\}+i\{r\sin\varphi_0-r_0\sin\varphi\})}{r^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{e^{-i(\varphi+\varphi_0)}\left(\ln\frac{r}{r_0}+i(\varphi-\varphi_0)\right)\sqrt{r^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}\,e^{i\arg(re^{i\varphi_0}-r_0e^{i\varphi})}}{r^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}\frac{e^{-i(\varphi+\varphi_0)}\left(\ln\frac{r}{r_0}+i(\varphi-\varphi_0)\right)e^{i\arg(re^{i\varphi_0}-r_0e^{i\varphi})}}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}}=\lim_{\substack{r\to r_0\\ \varphi\to\varphi_0+0}}F(r,\varphi)=L.$$

При вычислении предела L нужно рассматривать две возможности предельного стремления: 1) сначала $r \to r_0$, а затем $\varphi \to \varphi_0 + 0$; 2) $\varphi \to \varphi_0 + 0$, а затем $r \to r_0$. Если в первом случае получим значение предела l_1, во втором — l_2 и если $l_1 = l_2$, то $L = l_1 = l_2$. Рассмотрим случай 1). Имеем:

$$L = \lim_{\substack{r \to r_0 \\ \varphi \to \varphi_0 + 0}} F(r, \varphi) = \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \lim_{r \to r_0} F(r, \varphi) =$$

$$= \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \lim_{r \to r_0} \frac{e^{-i(\varphi + \varphi_0)} \left(\ln \frac{r}{r_0} + i(\varphi - \varphi_0) \right) e^{i \arg(re^{i\varphi_0} - r_0 e^{i\varphi_0})}}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2}} =$$

$$= \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \frac{e^{-i(\varphi + \varphi_0)} \left(\ln \frac{r_0}{r_0} + i(\varphi - \varphi_0) \right) e^{i \arg(r_0(e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi}))}}{\sqrt{2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(\varphi - \varphi_0)}} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2} r_0} \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \frac{e^{-i(\varphi + \varphi_0)} (\varphi - \varphi_0) e^{i \arg(e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi})}}{\sqrt{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)}} =$$

$$= \frac{e^{-i2\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} r_0} \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \frac{(\varphi - \varphi_0) e^{i \arg((\cos\varphi_0 - \cos\varphi) + i(\sin\varphi_0 - \sin\varphi))}}{\sqrt{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)}} =$$

$$= \frac{e^{-i2\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} r_0} \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \frac{(\varphi - \varphi_0) e^{i \arg\left(2\sin\frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2} - i2\cos\frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)}}{\sqrt{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)}}.$$

Произведем замену $\varphi - \varphi_0 = \xi$, тогда:

$$\frac{e^{-i2\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} r_0} \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \frac{(\varphi - \varphi_0) e^{i \arg\left(2\sin\frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2} - i2\cos\frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)}}{\sqrt{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)}} =$$

$$= \frac{e^{-i2\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} r_0} \lim_{\xi \to 0+0} \frac{\xi e^{i \arg\left(2\sin\frac{\xi}{2} \left(\sin\frac{\xi + 2\varphi_0}{2} - i\cos\frac{\xi + 2\varphi_0}{2} \right) \right)}}{\sqrt{1 - \cos\xi}} =$$

$$= \frac{e^{-i2\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} r_0} \lim_{\xi \to 0+0} \frac{\xi e^{i \arg\left(2\sin\frac{\xi}{2} e^{i\left(\frac{\xi + 2\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \right)}}{\sqrt{1 - \cos\xi}} =$$

$$= \frac{e^{-i2\varphi_0+\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}r_0} \lim_{\xi\to 0+0} \frac{\xi e^{i\left(\frac{\xi+2\varphi_0}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{1-\cos\xi}} = \frac{e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{2}r_0} \lim_{\xi\to 0+0} \frac{\xi e^{\frac{i\xi}{2}}}{\sqrt{1-\cos\xi}} =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{2}r_0} \lim_{\xi\to 0+0} \frac{\xi\cos\frac{\xi}{2} + i\xi\sin\frac{\xi}{2}}{\sqrt{1-\cos\xi}} =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{2}r_0} \left(\lim_{\xi\to 0+0} \frac{\xi\cos\frac{\xi}{2}}{\sqrt{1-\cos\xi}} + i \lim_{\xi\to 0+0} \frac{\xi\sin\frac{\xi}{2}}{\sqrt{1-\cos\xi}} \right) =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{2}r_0} \left(\sqrt{2} + i0\right) = \frac{\sqrt{2}e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{2}r_0} = \frac{1}{r_0 e^{i\varphi_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Теперь рассмотрим случай 2). Имеем:

$$L = \lim_{\substack{r\to r_0 \\ \varphi\to\varphi_0+0}} F(r,\varphi) = \lim_{r\to r_0} \lim_{\varphi\to\varphi_0+0} F(r,\varphi) =$$

$$= \lim_{r\to r_0} \lim_{\varphi\to\varphi_0+0} \frac{e^{-i(\varphi+\varphi_0)} \left(\ln\frac{r}{r_0} + i(\varphi-\varphi_0) \right) e^{i\arg(re^{i\varphi_0} - r_0 e^{i\varphi})}}{\sqrt{r^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0) + r_0^2}} =$$

$$= \lim_{r\to r_0} \frac{e^{-i2\varphi_0} \left(\ln\frac{r}{r_0} + i0 \right) e^{i\arg((r-r_0)e^{i\varphi_0})}}{\sqrt{r^2 - 2rr_0\cos 0 + r_0^2}} =$$

$$= e^{-i\varphi_0} \lim_{r\to r_0} \frac{\ln\frac{r}{r_0}}{\sqrt{(r-r_0)^2}} = e^{-i\varphi_0} \frac{1}{r_0} = \frac{1}{z_0}.$$

Очевидно, что $l_1 = l_2$, а значит,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0} = \frac{1}{z_0}, \quad z_0 \neq 0 + i0.$$

3.11. Дифференцируемы ли функции:
а) $f(z) = y^2 + x^2 + 2ixy$,
б) $f(z) = e^{3x}\cos 2y - ie^{3x}\sin 2y$,
в) $f(z) = n^z z^n$, $n \in \mathbb{N}$,
г) $f(z) = 2\,\mathrm{sh}\cos z + 2\,\mathrm{ch}\sin z$.

Р е ш е н и е.

а) Для того чтобы функция комплексной переменной $f(z)$ была дифференцируема в некоторой области D комплексной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы действительная и мнимая части функции $f(z)$ были дифференцируемы и выполнялись условия Коши–Римана.

Рассмотрим функцию $f(z) = y^2 + x^2 + 2ixy$. Ясно, что функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = y^2 + x^2$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 2xy$ дифференцируемы $\forall x, y \in \mathbb{R}$, условия Коши–Римана не выполнены:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \neq -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ не дифференцируема.

б) Рассмотрим функцию $f(z) = e^{3x}\cos 2y - ie^{3x}\sin 2y$. Ясно, что функции $u(x, y) = e^{3x}\cos 2y$, $v(x, y) = -e^{3x}\sin 2y$ дифференцируемы $\forall x, y \in \mathbb{R}$, условия Коши–Римана не выполнены:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^{3x}\cos 2y, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2e^{3x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -3e^{3x}\sin 2y, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -2e^{3x}\cos 2y,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \neq -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ не дифференцируема.

в) Выделим действительную и мнимую части функции $f(z) = n^z z^n$:

$$f(z) = n^z z^n = e^{re^{i\varphi}\ln n}(re^{i\varphi})^n = e^{r\ln n\cos\varphi + ir\ln n\sin\varphi} r^n e^{in\varphi} =$$

$$= n^{r\cos\varphi} r^n e^{i(r\ln n\sin\varphi + n\varphi)} = n^{r\cos\varphi} r^n \cos(r\ln n\sin\varphi + n\varphi) +$$

$$+ in^{r\cos\varphi} r^n \sin(r\ln n\sin\varphi + n\varphi).$$

Непосредственно отсюда видно, что функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ дифференцируемы при $r \geqslant 0 \varphi \in [0, 2\pi)$. Условия Коши–Римана выполнены, действительно:

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = n^{r\cos\varphi} r^n \left\{ \begin{array}{l} \cos(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi)\left(\cos\varphi\,\ln n + \dfrac{n}{r}\right) - \\ -\ln n\,\sin\varphi\,\sin(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi) \end{array} \right\},$$

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi} = -r^n n^{r\cos\varphi} \left(\begin{array}{l} r\ln n\,\sin\varphi\,\cos(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi) + \\ +(r\ln n\,\cos\varphi + n)\sin(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi) \end{array} \right),$$

$$\frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial r} = n^{r\cos\varphi} r^n \left\{ \begin{array}{l} \sin(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi)\left(\cos\varphi\,\ln n + \dfrac{n}{r}\right) + \\ +\ln n\,\sin\varphi\,\cos(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi) \end{array} \right\},$$

$$\frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial \varphi} = r^n n^{r\cos\varphi} \left(\begin{array}{l} (r\ln n\,\cos\varphi + n)\cos(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi) - \\ -r\ln n\,\sin\varphi\,\sin(r\ln n\,\sin\varphi + n\varphi) \end{array} \right),$$

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial r}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема.

Примечание: можно было воспользоваться алгебраической формой записи комплексного числа $z = x + iy$ и формулой:

$$(x+iy)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} (-1)^k x^{n-2k} y^{2k} +$$

$$+i\left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k-1} (-1)^{k+1} x^{n-2k+1} y^{2k-1} + \frac{y^n}{2}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}(1+(-1)^{n+1}) \right\}.$$

г) Выделим, как и раньше, действительную и мнимую части функции $f(z) = 2\,\mathrm{sh}\cos z + 2\,\mathrm{ch}\sin z$:

$$f(z) = 2\,\mathrm{sh}\cos z + 2\,\mathrm{ch}\sin z = e^{\cos z} - e^{-\cos z} + e^{\sin z} + e^{-\sin z} =$$
$$= e^{\cos(x+iy)} - e^{-\cos(x+iy)} + e^{\sin(x+iy)} + e^{-\sin(x+iy)} =$$
$$= e^{\cos x\cos iy - \sin x\sin iy} - e^{-\cos x\cos iy + \sin x\sin iy} + e^{\sin x\cos iy + \cos x\sin iy} +$$
$$+ e^{-\sin x\cos iy - \cos x\sin iy} = e^{\cos x\,\mathrm{ch}y - i\sin x\,\mathrm{sh}y} - e^{-\cos x\,\mathrm{ch}y + i\sin x\,\mathrm{sh}y} +$$
$$+ e^{\sin x\,\mathrm{ch}y + i\cos x\,\mathrm{sh}y} + e^{-\sin x\,\mathrm{ch}y - i\cos x\,\mathrm{sh}y} = e^{\cos x\,\mathrm{ch}y}(\cos\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\} -$$
$$- i\sin\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\}) - e^{-\cos x\,\mathrm{ch}y}(\cos\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\} +$$
$$+ i\sin\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\}) + e^{\sin x\,\mathrm{ch}y}(\cos\{\cos x\,\mathrm{sh}\,y\} + i\sin\{\cos x\,\mathrm{sh}\,y\}) +$$
$$+ e^{-\sin x\,\mathrm{ch}y}(\cos\{\cos x\,\mathrm{sh}\,y\} - i\sin\{\cos x\,\mathrm{sh}\,y\}) =$$
$$= e^{\cos x\,\mathrm{ch}y}\cos\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\} - ie^{\cos x\,\mathrm{ch}y}\sin\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\} -$$
$$- e^{-\cos x\,\mathrm{ch}y}\cos\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\} - ie^{-\cos x\,\mathrm{ch}y}\sin\{\sin x\,\mathrm{sh}\,y\} +$$

$$
\begin{aligned}
&+ e^{\sin x \operatorname{ch} y}\cos\{\cos x \operatorname{sh} y\} + ie^{\sin x \operatorname{ch} y}\sin\{\cos x \operatorname{sh} y\} + \\
&+ e^{-\sin x \operatorname{ch} y}\cos\{\cos x \operatorname{sh} y\} - ie^{-\sin x \operatorname{ch} y}\sin\{\cos x \operatorname{sh} y\} = \\
&= 2\cos\{\sin x \operatorname{sh} y\}\operatorname{sh}\{\cos x \operatorname{ch} y\} + \\
&+ 2\cos\{\cos x \operatorname{sh} y\}\operatorname{ch}\{\sin x \operatorname{ch} y\} + \\
&+ i(2\sin\{\cos x \operatorname{sh} y\}\operatorname{sh}\{\sin x \operatorname{ch} y\} - \\
&- 2\sin\{\sin x \operatorname{sh} y\}\operatorname{ch}\{\cos x \operatorname{ch} y\}).
\end{aligned}
$$

Легко проверить, что условия Коши–Римана выполнены, что вместе с дифференцируемостью функций $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ позволяет утверждать, что функция $f(z)$ дифференцируема.

3.12. Дана действительная часть $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти $f(z)$.

Р е ш е н и е.

Ввиду того что функция $f(z)$ дифференцируема, то для нее выполнены условия Коши–Римана, т. е.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

или, применительно к нашей задаче:

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x + 2.$$

Для того чтобы выражение

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$ (называемой потенциальной функцией), необходимо и достаточно, чтобы, как известно из курса классического анализа, выполнялось условие (см. главу 2)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v(x, y)}{\partial y},$$

которое имеет место в данном случае. Восстановим потенциальную функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу, для чего возьмем криволинейный интеграл второго рода по контуру $L = L_1 + L_2$, где

$$L_1:\begin{cases} x = t, \\ y = y_0, \\ t \in [x_0, x]; \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} x = x, \\ y = t, \\ t \in [y_0, y]. \end{cases}$$

Имеем:

$$U(x,y) = \int_L \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}dy = \int_L 2y\,dx + (2x+2)dy =$$

$$= \int_{L_1} 2y_0\,dt + \int_{L_2} (2x+2)dt = 2y_0 \int_{x_0}^{x} dt + (2x+2)\int_{y_0}^{y} dt =$$

$$= 2y_0(x - x_0) + (2x+2)(y - y_0) =$$

$$= (2xy + 2y) - (2y_0x_0 + 2y_0) = U_1(x,y) - U_1(x_0, y_0).$$

Непосредственно отсюда видно, что

$$U(x, y) = U_1(x, y) + c = 2xy + 2y + c, c \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что это и есть искомая мнимая часть функции $f(z)$, откуда следует, что

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + c) = x^2 -$$
$$- y^2 + 2x + i(2xy + 2y) + C =$$
$$= (x^2 + 2x(iy) + (iy)^2) + 2(x + iy) + C = (x + iy)^2 +$$
$$+ 2(x + iy) + C = z^2 + 2z + C, C = ic.$$

3.13. Дана мнимая часть $v(x, y) = 3^x \sin(y \ln 3)$ аналитической функции $f(z)$. Найти $f(z)$.

Р е ш е н и е.

Ввиду того, что функция $f(z)$ аналитическая, то для нее выполнены условия Коши–Римана, т. е.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Применительно к нашей задаче эти условия перепишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3^x \ln 3 \cos(y \ln 3), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -3^x \ln 3 \sin(y \ln 3).$$

Выражение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, действительно равенство, необходимое для этого,

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

имеет место в данном случае. Восстановим потенциальную функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу, для чего возьмем криволинейный интеграл второго рода по контуру $L = L_1 + L_2$, где

$$L_1: \begin{cases} x = t, \\ y = y_0, \\ t \in [x_0, x]; \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = x, \\ y = t, \\ t \in [y_0, y]. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_L \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = \\ &= \int_L 3^x \ln 3 \cos(y\ln 3)dx - 3^x \ln 3 \sin(y\ln 3)dy = \\ &= \int_{L_1} 3^t \ln 3 \cos(y_0 \ln 3)dt - \int_{L_2} 3^x \ln 3 \sin(t\ln 3)dt = \\ &= \cos(y_0\ln 3)\int_{L_1} 3^t \ln 3 dt - 3^x \int_{L_2} \ln 3 \sin(t\ln 3)dt = \\ &= \cos(y_0\ln 3)\int_{x_0}^{x} d3^t + 3^x \int_{y_0}^{y} d\cos(t\ln 3) = \cos(y_0\ln 3)3^x - \\ &\quad - \cos(y_0\ln 3)3^{x_0} + 3^x\cos(y\ln 3) - 3^x\cos(y_0\ln 3) = \\ &= 3^x\cos(y\ln 3) - 3^{x_0}\cos(y_0\ln 3) = U_1(x,y) - U_1(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Непосредственно отсюда видно, что

$$U(x, y) = 3^x \cos(y \ln 3) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что это и есть искомая действительная часть функции $f(z)$, откуда следует, что:

$$\begin{aligned} f(z) &= 3^x\cos(y\ln 3) + C + i3^x\sin(y\ln 3) = \\ &= 3^x(\cos(y\ln 3) + i\sin(y\ln 3)) + C = \\ &= 3^x e^{iy\ln 3} + C = 3^x 3^{iy} + C = 3^{x+iy} + C = 3^z + C. \end{aligned}$$

3.14. Найти такие функции $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\omega(y)$, $\tau(y)$, чтобы функция комплексной переменной

$$f(z) = (\xi(x) + \omega(y) - 3xy^2) + i(\eta(x) + \tau(y) + 3x^2y + 4xy + 5x)$$

была аналитической. Найти ее вид.

Р е ш е н и е. Так как функция $f(z)$ должна быть аналитической, то она обязана удовлетворять условиям Коши–Римана, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\xi(x) + \omega(y) - 3xy^2) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\eta(x) + \tau(y) + 3x^2y + 4xy + 5x), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\xi(x) + \omega(y) - 3xy^2) = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\eta(x) + \tau(y) + 3x^2y + 4xy + 5x) \end{cases}$$

или, что то же:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi(x)}{dx} - 3y^2 = \dfrac{d\tau(y)}{dy} + 3x^2 + 4x, \\ \dfrac{d\omega(y)}{dy} = -\dfrac{d\eta(x)}{dx} - 4y - 5. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi(x)}{dx} - 3x^2 - 4x = \dfrac{d\tau(y)}{dy} + 3y^2, \\ \dfrac{d\eta(x)}{dx} = -4y - 5 - \dfrac{d\omega(y)}{dy}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_a^x \left(\frac{d\xi(t)}{dt} - 3t^2 - 4t \right) dt = \int_b^y \left(\frac{d\tau(t)}{dt} + 3t^2 \right) dt, \\ \displaystyle\int_c^x \frac{d\eta(t)}{dt} dt = \int_d^y \left(-4t - 5 - \frac{d\omega(t)}{dt} \right) dt; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi(x) - x^3 - 2x^2 - \xi(a) + a^3 + 2a^2 = \tau(y) + y^3 - \tau(b) - b^3, \\ \eta(x) - \eta(c) = -2y^2 - 5y - \omega(y) + 2d^2 + 5d + \omega(d); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi(x) - x^3 - 2x^2 + C_1 = \tau(y) + y^3, & (1) \\ \eta(x) + C_2 = -2y^2 - 5y - \omega(y). & (2) \end{cases}$$

Равенство (1) возможно в том случае, если

$$\begin{cases} \xi(x) = x^3 + 2x^2 + C_3, \\ \tau(y) = -y^3 + C_4. \end{cases}$$

Равенство (2) возможно в том случае, если

$$\begin{cases}\eta(x)=C_5,\\ \omega(y)=-2y^2-5y+C_6.\end{cases}$$

Таким образом, имеем:

$$f(z)=(x^3+2x^2-2y^2-5y-3xy^2)+\\ +i(-y^3+3x^2y+4xy+5x)+z_0,\ z_0=\sigma_r+i\sigma_i\in\mathbb{C}.$$

Пусть функция $f(z)$ имеет вид: $f(z)=\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta$, где коэффициенты $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ требуется найти. Выделим $\operatorname{Re}(\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta)$ и $\operatorname{Im}(\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta)$, полагая $Q=$ $=Q_r+iQ_i$, $Q=\alpha,\beta,\gamma,\delta,Q_r,Q_i\in\mathbb{R}$, имеем:

$$f(z)=\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta=(\alpha_r+i\alpha_i)(x+iy)^3+\\ +(\beta_r+i\beta_i)(x+iy)^2+(\gamma_r+i\gamma_i)(x+iy)+(\delta_r+i\delta_i)=\\ =\{\alpha_i y^3-3\alpha_r xy^2-3\alpha_i x^2y-\beta_r y^2-2\beta_i xy-\gamma_i y+\alpha_r x^3+\\ +\beta_r x^2+\gamma_r x+\delta_r\}+i\{-\alpha_r y^3-3\alpha_i xy^2-\beta_i y^2+3\alpha_r x^2y+\\ +\alpha_i x^3+2\beta_r xy+\beta_i x^2+\gamma_r y+\gamma_i x+\delta_i\}.$$

Исходя из принципа равенства двух комплексных чисел, имеем:

$$\begin{cases}x^3+2x^2-2y^2-5y-3xy^2+\sigma_r=\alpha_i y^3-3\alpha_r xy^2-3\alpha_i x^2y-\\ \quad-\beta_r y^2-2\beta_i xy-\gamma_i y+\alpha_r x^3+\beta_r x^2+\gamma_r x+\delta_r,\\ -y^3+3x^2y+4xy+5x+\sigma_i=-\alpha_r y^3-3\alpha_i xy^2-\beta_i y^2+\\ \quad+3\alpha_r x^2y+\alpha_i x^3+2\beta_r xy+\beta_i x^2+\gamma_r y+\gamma_i x+\delta_i.\end{cases}$$

Отсюда заключаем, что:

$$\begin{cases}\alpha_r=1, & \alpha_i=0,\\ \beta_r=2, & \beta_i=0,\\ \gamma_r=0, & \gamma_i=5,\\ \sigma_r=\delta_r;\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_r=1, & \alpha_i=0,\\ \beta_r=2, & \beta_i=0,\\ \gamma_r=0, & \gamma_i=5,\\ \sigma_i=\delta_i.\end{cases}$$

Таким образом, имеем: $\alpha=1+i0$, $\beta=2+i0$, $\gamma=0+i5$, $z_0=\sigma_r+i\sigma_i$, $\sigma_r,\sigma_i\in\mathbb{R}$, а значит, $f(z)=z^3+2z^2+5iz+z_0$.

3.15. Проверить выполнение условий Коши–Римана для следующих функций комплексной переменной:

а) $f(z)=\sin^2 z$; б) $f(z)=\operatorname{Ln} z$; в) $f(z)=4^{z^2+2iz}$.

Решение.

а) Выделим действительную и мнимую части функции $f(z)$:

$$f(z)=\sin^2 z=\left\{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right\}^2=-\frac{1}{4}\{e^{2iz}-2+e^{-2iz}\}=$$

$$=-\frac{1}{4}\{e^{2i(x+iy)}-2+e^{-2i(x+iy)}\}=-\frac{1}{4}\{e^{2ix-2y}-2+e^{-2ix+2y}\}=$$

$$=-\frac{1}{4}\{e^{-2y}(\cos 2x+i\sin 2x)-2+e^{2y}(\cos 2x-i\sin 2x)\}=$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos 2x(e^{-2y}+e^{2y})-2)-i\frac{\sin 2x}{4}(e^{-2y}-e^{2y})=$$

$$=\frac{1-\cos 2x\operatorname{ch}2y}{2}+i\frac{\sin 2x\operatorname{sh}2y}{2}.$$

Проверим выполнение условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\sin 2x\operatorname{ch}2y,\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\cos 2x\operatorname{sh}2y,$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\cos 2x\operatorname{sh}2y,\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\sin 2x\operatorname{ch}2y.$$

Условия Коши–Римана выполнены для функции

$$f(z)=\sin^2 z.$$

б) По определению верно, что:

$$f(z)=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Нетрудно показать, что для главного значения аргумента комплексного числа z верно следующее представление[2] (полагаем, что $\arg z\in[0,2\pi)$):

$$\arg z=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(1-\operatorname{sign}x)+\operatorname{sign}(xy)\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x\neq 0;\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}y, & x=0,\ y\neq 0.\end{cases}$$

[2] Данное представление может быть записано так:

$$\arg z=\lim_{\substack{\xi\to x\\ \eta\to y}}\left\{\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sign}\xi)+\operatorname{sign}(\xi\eta)\operatorname{arctg}\left|\frac{\eta}{\xi}\right|\right\},\ (x,y)\neq(0,0).$$

Проверим выполнение условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Условия Коши–Римана выполнены для функции

$$f(z)=\operatorname{Ln} z.$$

Примечание. При выводе формул для

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\ \text{и}\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

были использованы следующие формулы и свойства:

1) $\operatorname{sign}(xy)=\operatorname{sign}x\operatorname{sign}y$;

2) $\operatorname{sign}\frac{y}{x}=\operatorname{sign}y\operatorname{sign}x,\ x\neq 0$;

3) $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}x=\frac{1}{1+x^2}$;

4) $\frac{d}{dx}|x|=\operatorname{sign}x$;

5) $\{\operatorname{sign}x\}^2=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

в) Выделим действительную и мнимую части функции $f(z)$:

$$\begin{aligned}f(z)=4^{z^2+2iz}&=\exp\{((x+iy)^2+2i(x+iy))\ln 4\}=\\&=\exp\{[(x^2-y^2-2y)+i(2x+2xy)]\ln 4\}=\\&=4^{x^2-y^2-2y}\cos\{(2x+2xy)\ln 4\}+\\&+i4^{x^2-y^2-2y}\sin\{(2x+2xy)\ln 4\}.\end{aligned}$$

Проверим выполнение условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2\cdot 4^{x^2\ y^2\ 2y}\ln 4[x\cos\{(2x+2xy)\ln 4\} -$$
$$-(1+y)\sin\{(2x+2xy)\ln 4\}],$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2\cdot 4^{x^2-y^2-2y}\ln 4[(y+1)\cos\{(2x+2xy)\ln 4\} +$$
$$+\sin\{(2x+2xy)\ln 4\}x],$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2\cdot 4^{x^2-y^2-2y}\ln 4[x\sin\{(2x+2xy)\ln 4\} +$$
$$+\cos\{(2x+2xy)\ln 4\}(1+y)],$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2\cdot 4^{x^2-y^2-2y}\ln 4[x\cos\{(2x+2xy)\ln 4\} -$$
$$-(1+y)\sin\{(2x+2xy)\ln 4\}].$$

Условия Коши–Римана выполнены для функции

$$f(z) = 4^{z^2+2iz}.$$

3.9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Так как $f'(z_0)$ есть комплексное число, то при условии $f'(z_0) \neq 0$ его можно представить в показательной форме $f'(z_0) = ke^{i\beta}$, где $k = |f'(z_0)|$, $\beta = \operatorname{Arg} f'(z_0)$. Так как

$$k = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|},$$

то с точностью до величин более высокого порядка малости по сравнению с $|\Delta z|$ имеем $|\Delta w| = k|\Delta z|$. Геометрический смысл этого равенства заключается в том, что при отображении достаточно малой окрестности точки z_0 в окрестность точки $w_0 = f(z_0)$, определяемом аналитической функцией $w = f(z)$, имеет место подобие, состоящее в том, что линейные элементы окрестности точки z_0 преобразуются в линейные элементы окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ с коэффициентом подобия k. Это свойство отображения называется свойством постоянства растяжений. Далее, очевидно,

$$\beta = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \Delta z.$$

Геометрический смысл этого равенства состоит в том, что оно выполняется при предельном переходе $\Delta z \to 0$ по любой гладкой линии, проходящей через точку z_0. А это означает, что при отображении, определяемом аналитической функцией, имеет место сохранение углов (например, между двумя линиями, проходящими через точку z_0, и их образами в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$).

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки $w_0 = f(z_0)$, при котором имеет место сохранение углов и постоянство растяжений, называется **конформным отображением**. Таким образом, отображение, задаваемое аналитической функцией комплексной переменной, является конформным отображением.

3.10. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексной плоскости и L — кусочно-гладкая линия, лежащая в этой области, с началом в точке $A(x_A, y_A)$, т. е. $z_A = x_A + iy_A$, с концом в точке $B(x_B, y_B)$, т. е. $z_B = x_B + iy_B$. Напомним, что кусочно-гладкая линия — это линия, которую можно задать параметрически кусочно-гладкими функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $x_A = x(\alpha)$, $x_B = x(\beta)$, $y_A = y(\alpha)$, $y_B = y(\beta)$.

Разобьем кривую L произвольным образом на n частичных дуг с помощью точек $z_A = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z_B$, соответствующих возрастающим значениям параметра t, т. е. $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$, причем $z_k = z(t_k) = x(t_k) + iy(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \tag{3.32}$$

где ξ_k — произвольная точка k частичной дуги $A_{k-1}A_k$, $\xi_k = x(\theta_k) + iy(\theta_k)$, $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Если при $\max|\Delta z_k| \to 0$, существует предел интегральной суммы (3.32), не зависящий от выбора промежуточных точек ξ_k и от способа разбиения кривой L на частичные дуги,

то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по линии L и обозначается

$$\int_L f(z)dz. \tag{3.33}$$

Таким образом,

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max \Delta z_k \to 0,\ k=1} \sum^{n} f(\xi_k)\Delta z_k. \tag{3.34}$$

Интеграл (3.33) после подстановки в (3.34) выражения $f(z) = u(x, y) + iv(x\ y)$ и $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ приводится к следующей алгебраической сумме двух криволинейных интегралов по координатам

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L u(x, y)dy + v(x, y)dx. \tag{3.35}$$

Таким образом, можно записать согласно (3.35):

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy). \tag{3.36}$$

Из (3.35–3.36) следует, что вопрос о существовании и вычислении интеграла (3.33) по комплексной переменной сводится к вопросу о существовании двух криволинейных интегралов по координатам

$$\int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy \quad \text{и} \quad \int_L u(x, y)dy + v(x, y)dx.$$

Отсюда следует также, что свойства интеграла по комплексной переменной аналогичны свойствам криволинейных интегралов по координатам (2-го рода) и могут быть представлены в виде:

$$1.\ \int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz, \tag{3.37}$$

$$2.\ \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz = \int_{L_1+L_2} f(z)dz, \tag{3.38}$$

$$3.\ \int_L A \cdot f(z)dz = A \cdot \int_L f(z)dz, \tag{3.39}$$

где A — комплексная постоянная,

4. $$\int_L (f(z)+g(z))dz = \int_L f(z)dz + \int_L g(z)dz, \tag{3.40}$$

5. $$\left|\int_L f(z)dz\right| \leqslant \int_L |f(z)||dz|, \tag{3.41}$$

6. $$\left|\int_L f(z)dz\right| \leqslant Ml, \text{ где } M = \max_{z\in L}|f(z)|, \quad l = \int_L |dz| \tag{3.42}$$

— длина линии L,

7. $$\int_L f(z)dz = \int_C f[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)d\xi, \tag{3.43}$$

где $z = \varphi(\xi)$ — аналитическая функция комплексной переменной ξ, устанавливающая взаимнооднозначное соответствие между линиями L и C.

3.11. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

3.11.1. ТЕОРЕМА КОШИ

Основной теоремой в теории аналитических функций комплексной переменной является следующая **теорема Коши:**

Если D — односвязная конечная область комплексной плоскости и $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в этой области, то интеграл от этой функции по любой замкнутой кусочно-непрерывной линии L (по замкнутому контуру), лежащей в области D аналитичности функции $f(z)$, равен нулю:

$$\oint_L f(z)dz = 0. \tag{3.44}$$

Справедливость теоремы следует из представления

$$\int_L f(z)dz$$

в виде (3.35) и условий Коши–Римана (3.24), (3.25), являющихся одновременно условиями независимости криволинейных интегралов

$$\int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy \quad \text{и} \quad \int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

от пути интегрирования и, следовательно, их равенства нулю по любому замкнутому контуру.

3.11.2. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Таким образом, для аналитической в области D функции $f(z)$ интеграл по любой линии, целиком лежащей в этой области и соединяющей две произвольные точки z и z_0 области D, не зависит от выбора линии интегрирования в области D, соединяющей две эти точки, и, таким образом, является однозначной функцией z. В этом случае можно не указывать линию интегрирования, а просто написать

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z),$$

указав начальную z_0 и конечную z точки интегрирования.

Несмотря на условие односвязности области D в формулировке теоремы, она применима и в случае, когда область D является многосвязной (см. главу 2).

Если $f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной области $\bar{D}$, ограниченной внешним замкнутым контуром C и внутренними контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так что граница области $\bar{D}$ есть контур $L = C + C_1 + C_2 + \ldots + C_n$, то интеграл от функции $f(z)$, взятый по всей границе L области $\bar{D}$, проходимой так, чтобы область $\bar{D}$ при этом оставалась с одной (обычно слева) стороны, равен нулю, т. е. справедливо равенство (3.44).

Важным следствием теоремы Коши является возможность ввести понятие неопределенного интеграла или первообразной аналитической функции $f(z)$ в области D. Для аналитической в области D функции $f(z)$ установлено, что функция

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

является аналитической в той же области и для всех точек z области D справедливо равенство $\Phi'(z) = f(z)$. В этом случае аналитическая функция $\Phi(z)$ называется **неопределенным интегралом или первообразной аналитической функции** $f(z)$. Очевидно, что функция $f(z)$ имеет множество первообразных, различающихся одна от другой только постоянным слагаемым. Отсюда следует, что так же, как и

для функции действительной переменной, справедлива формула, аналогичная формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1),$$

где $F(z)$ — любая первообразная функции $f(z)$.

Примеры.

3.16. Вычислить

$$\int_L \frac{dz}{(z-a)^n},$$

где L — окружность радиуса R с центром в точке a, приходящаяся против часовой стрелки, n — целое число.

Р е ш е н и е. Ясно, что $L = \{z \| z - a| = R\}$, отсюда $L = \{z | z = Re^{i\varphi} + a, \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Таким образом,

$$\int_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \left\{ \begin{array}{c} z = Re^{i\varphi} + a \\ dz = iRe^{i\varphi}d\varphi \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}d\varphi}{(Re^{i\varphi} + a - a)^n} = iR \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} =$$

$$= iR^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(1-n)}d\varphi = \left[\begin{array}{l} i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi, \quad n = 1; \\ \dfrac{iR^{1-n}}{i(1-n)} \{e^{i\varphi(1-n)}\}\Big|_0^{2\pi}; \end{array} \right. = \left[\begin{array}{l} 2\pi i, \quad n = 1; \\ 0, \quad n \neq 1. \end{array} \right.$$

3.17. Вычислить

$$\int_L (2x^2 + 3y^2 i)dz,$$

где L — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Р е ш е н и е. Найдем уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 + 3i$. Положим, она имеет вид $\operatorname{Im} z = k \operatorname{Re} z + b$, отсюда следует, что для нее верна система:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} z_1 = k \operatorname{Re} z_1 + b, \\ \operatorname{Im} z_2 = k \operatorname{Re} z_2 + b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k + b, \\ 3 = 2k + b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

Таким образом, искомая прямая есть $\operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z - 1$, тогда контур L может быть представлен следующим образом:

$$L = \{z \in \mathbb{C} | z = x + iy, x = t, y = 2t - 1, t \in [1, 2]\}.$$

Теперь можно без проблем вычислить интеграл

$$\int_L (2x^2 + 3y^2 i)dz:$$

$$\int_L (2x^2 + 3y^2 i)dz = \left\{\begin{array}{l} x = t, \quad y = 2t - 1, \\ dz = dx + idy = (1 + 2i)dt, \\ 2x^2 + 3y^2 i = 2t^2 + 3(2t-1)^2 i \end{array}\right\} =$$

$$= \int_1^2 (2t^2 + 3(2t-1)^2 i)(1 + 2i)dt =$$

$$= (1 + 2i)\left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}(2t-1)^3 i\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(-64 + 67i).$$

3.18. Вычислить

$$\int_L (z^2 + 2z\bar{z})dz,$$

где L — дуга окружности $|z| = 1$, $\arg z \in [0, \pi]$.

Р е ш е н и е. Ясно, что $L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi]\}$, тогда

$$\int_L (z^2 + 2z\bar{z})dz = \left\{\begin{array}{l} z = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi], \\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi, \\ \bar{z} = \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} \end{array}\right\} = \int_0^\pi (e^{2i\varphi} + 2e^{i\varphi}e^{-i\varphi})ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi (e^{2i\varphi} + 2)de^{i\varphi} = \left(\frac{1}{3}e^{3i\varphi} + 2e^{i\varphi}\right)\Big|_0^\pi = -\frac{14}{3}.$$

3.19. Вычислить

$$\int_0^i z \sin z dz.$$

Р е ш е н и е. Ввиду того что функция $f(z) = z \sin z$ аналитическая в любой области $D \subset \mathbb{C}$, охватывающей произвольный контур L, соединяющий точки 0 и i (проверка этого факта предоставляется читателю), то по следствию из теоремы Коши имеем:

$$\int_0^i z \sin z dz = -\int_0^i z d\cos z = -\{z\cos z\}\Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz =$$

$$= -i\cos i + \{\sin z\}\Big|_0^i = -i\cos i + \sin i = -i(\cos i + i\sin i) = -ie^{i \cdot i} = -\frac{i}{e}.$$

3.20. Вычислить

$$\int_1^i \frac{\ln^2 z}{z} dz.$$

Р е ш е н и е. Возьмем некоторую область D, не содержащую 0. В ней, как не трудно убедиться, функция

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{z}$$

является аналитической, а значит, по следствию из теоремы Коши

$$\int_1^i \frac{\ln^2 z}{z} dz = \int_1^i \ln^2 z \, d\ln z = \frac{\ln^3 z}{3}\Big|_1^i = \frac{\ln^3 i - \ln^3 1}{3} =$$

$$= \frac{\ln^3 i}{3} = \frac{(\ln|i| + i\arg i)^3}{3} = \frac{1}{3}\left(i\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{-i\pi^3}{24}.$$

3.12. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

3.12.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Пусть $f(z)$ есть однозначная аналитическая функция в односвязной области D и $L \subset D$ — произвольная замкнутая кусочно-непрерывная линия, ограничивающая область $G \subset D$. Тогда для любой точки $z_0 \in G$ имеет место **интегральная формула Коши**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (3.45)$$

Формула Коши дает возможность определить значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке внутри некоторой области аналитичности по ее значениям на замкнутом контуре, ограничивающим эту область.

3.12.2. ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Для любой точки $z_0 \in G \subset D$ производную $f'(z_0)$ можно найти дифференцированием правой части (3.43) под знаком интеграла, что приводит к следующему выражению для $f'(z_0)$:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz. \tag{3.46}$$

Применяя повторное дифференцирование из (3.46), по индукции доказывается следующая формула для производной n-го порядка аналитической функции $f(z)$:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \tag{3.47}$$

Примеры.

3.21. Вычислить

$$\int_L \frac{60e^z}{z(z+3)(z+4)(z+5)}dz,$$

где L — единичная окружность с центром в начале координат.

Р е ш е н и е. Подынтегральное выражение представимо в виде

$$\frac{f(z)}{z-a},$$

где

$$f(z)=\frac{60e^z}{(z+3)(z+4)(z+5)},\ a=0.$$

Функция $f(z)$ есть однозначная аналитическая функция в области D, такой, что $D=\{z\in\mathbb{C}\|z|\leqslant 2\}$, причем $L\subset D$ и является замкнутой непрерывной линией, ограничивающей область $G=\{z\in\mathbb{C}\|z|<1\}\subset D$. Таким образом, все условия интегральной формулы Коши выполнены, а значит:

$$\int_L \frac{60e^z dz}{z(z+3)(z+4)(z+5)}=2\pi i f(a)=2\pi i f(0)=$$

$$=2\pi i\frac{60e^0}{(0+3)(0+4)(0+5)}=2\pi i.$$

3.22. Вычислить

$$\int_L \frac{\sin 3z}{(6z-\pi)^3}dz,$$

где L — единичная окружность с центром в начале координат.

Р е ш е н и е. Подынтегральное выражение представимо в виде

$$\frac{f(z)}{(z-a)^3},$$

где $f(z) = 6^{-3}\sin 3z$, $a = \dfrac{\pi}{6}$. Функция $f(z)$ есть однозначная аналитическая функция в области D, такой, что

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\|z| \leqslant \frac{\pi}{2} \right\},$$

причем $L \subset D$ и является замкнутой непрерывной линией, ограничивающей область $G = \{z \in \mathbb{C} \|z| < 1\} \subset D$. Таким образом, все условия интегральной формулы Коши выполнены и по следствию из нее имеем:

$$\int_L \frac{\sin 3z}{(6z-\pi)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(a) = i\pi f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{i\pi}{24}.$$

3.23. Вычислить

$$\int_L \frac{e^z}{z^2+9} dz,$$

где L — окружность: а) $|z - 3i| = 2$; б) $|z - 3i| = 9$.

Р е ш е н и е.

а) Очевидно равенство:

$$\int_L \frac{e^z}{z^2+9} dz = \frac{i}{6} \int_L \left(\frac{e^z}{z+3i} - \frac{e^z}{z-3i} \right) dz =$$

$$= \frac{i}{6} \int_L \frac{e^z}{z+3i} dz - \frac{i}{6} \int_L \frac{e^z}{z-3i} dz = \frac{i}{6}(I_1 - I_2).$$

Если контур L является окружностью $|z - 3i| = 2$, то интеграл I_1 равен нулю, так как функция $\dfrac{e^z}{z+3i}$ аналитична в области $D = \{z \in \mathbb{C} \|z - 3i| \leqslant 2 + \delta, \delta \in [0, 4)\}$, а интеграл

$$I_2 = \int_L \frac{e^z}{z-3i} dz$$

равен, по интегральной формуле Коши, $I_2 = 2\pi i e^{3i}$.

Таким образом,

$$\int_L \frac{e^z}{z^2+9} dz = \frac{i}{6}(I_1 - I_2) = \frac{i}{6}(0 - 2\pi i e^{3i}) = -\frac{\pi}{3} e^{i(3-\pi)}.$$

б) Если контур L является окружностью $|z - 3i| = 9$, то, согласно интегральной формуле Коши, условия которой выполнены для интегралов I_1 и I_2, интеграл I_1 равен $I_1 = 2\pi i e^{-3i}$, а интеграл $I_2 = 2\pi i e^{3i}$. Таким образом,

$$\int_L \frac{e^z}{z^2+9}dz = \frac{i}{6}(I_1 - I_2) = \frac{i}{6}(2\pi i e^{-3i} - 2\pi i e^{3i}) =$$

$$= \frac{-2\pi i^2}{3}\frac{e^{3i} - e^{-3i}}{2i} = \frac{2\pi \sin 3}{3}.$$

3.24. Путем вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\frac{1}{\alpha})}$$

по контуру $L = \{z \in \mathbb{C} \| |z| = 1\}$, доказать, что при $\alpha \in (0, 1)$ верно равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi} = \frac{2\pi}{1-\alpha^2}.$$

Р е ш е н и е. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{2\pi i(1-\alpha^2)}\int_L \left(\frac{1}{z-\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{z-\alpha}\right)dz =$$

$$= \beta\left\{\int_L \frac{dz}{z-\frac{1}{\alpha}} - \int_L \frac{dz}{z-\alpha}\right\} = \beta\{J_1 - J_2\}.$$

Интеграл

$$J_1 = \int_L \frac{dz}{z-\frac{1}{\alpha}}$$

равен нулю, так как при $\alpha \in (0, 1)$ подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{\alpha}}$$

аналитична в области

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} \,\|\, |z| = \frac{1}{\alpha} + \delta, \quad \alpha \in (0,1), \quad \delta > 0\right\},$$

охватывающей контур L.

В соответствии с интегральной формулой Коши интеграл $J_2 = \int\limits_L \frac{dz}{z-\alpha}$ равен $J_2 = 2\pi i f(\alpha) = 2\pi i$.

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)} = \beta\{J_1 - J_2\} = \frac{\alpha}{2\pi i(1-\alpha^2)}(0-2\pi i) = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}.$$

Преобразуем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

с учетом того, что $L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)\}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)} = \beta\left\{\int\limits_L \frac{dz}{z-\frac{1}{\alpha}} - \int\limits_L \frac{dz}{z-\alpha}\right\} =$$

$$= \beta\left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}-\frac{1}{\alpha}} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}-\alpha}\right\} =$$

$$= i\beta\left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi}{\cos\varphi - \frac{1}{\alpha} + i\sin\varphi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi}{\cos\varphi - \alpha + i\sin\varphi}\right\} =$$

$$= i\beta\left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)\left(\cos\varphi - \frac{1}{\alpha} - i\sin\varphi\right)d\varphi}{\left(\cos\varphi - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \sin^2\varphi} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - \alpha - i\sin\varphi)d\varphi}{(\cos\varphi - \alpha)^2 + \sin^2\varphi}\right\} =$$

$$= i\beta\left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{\alpha}\cos\varphi - i\frac{1}{\alpha}\sin\varphi}{\frac{1}{\alpha^2}(1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi)}d\varphi - \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\alpha\cos\varphi - \alpha i\sin\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi}d\varphi\right\} =$$

$$= i\beta\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{\alpha^2 - \alpha\cos\varphi - i\alpha\sin\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi} - \frac{1-\alpha\cos\varphi - \alpha i\sin\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi}\right\}d\varphi =$$

$$= i\beta\int\limits_0^{2\pi} \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi}d\varphi = i\beta(\alpha^2-1)\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi} =$$

$$= \frac{-\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{-\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi},$$

откуда следует, что:

$$\frac{-\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi} = \frac{\alpha}{\alpha^2-1} \Leftrightarrow \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi} = \frac{2\pi}{1-\alpha^2}.$$

3.13. РЯДЫ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.13.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Так же, как и на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, на множестве комплексных чисел рядом называется выражение вида

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$$

или сокращенно, с использованием знака суммирования,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z). \qquad (3.48)$$

Величины $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_n(z)$, ... называются членами ряда, $u_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ — общим членом ряда. Если члены ряда (3.48) $u_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ являются числами, то ряд (3.48) называется **числовым**, если функциями комплексной переменной $z = x + iy$ — **функциональным**.

Сумма n первых членов ряда S_n называется n-й частичной суммой ряда, т. е. $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$. Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$ называется n-м остатком ряда.

Ряд (3.48) называется **сходящимся**, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S \in \mathbb{C}$. При этом $S(z)$ называется суммой ряда (3.48). Если не существует предел S_n, то ряд (3.48) называется **расходящимся**.

Если ряд (3.48) сходится, то предел общего члена ряда равен нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{3.49}$$

Этот результат называется **необходимым признаком** сходимости ряда (3.48). Сходящиеся ряды можно почленно складывать (т. е. складывать члены рядов с одинаковыми номерами), умножать на произвольное комплексное число, отбрасывать конечное число членов ряда. При этом опять получаются сходящиеся ряды, но уже с другой суммой.

Множество значений z, при которых функциональный ряд (3.48) сходится, называется областью сходимости ряда. Одним из наиболее часто употребляемых подходов к исследованию сходимости рядов аналитических функций является применение достаточных признаков сходимости Даламбера и Коши к функциональному ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного функционального ряда, т. е. к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|;$$

имея при этом в виду, что значение переменной z в процессе применения признаков задано. В результате применения, например, признаков Даламбера и Коши получают, соответственно, неравенства:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = q(x, y) < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = q(x, y) < 1.$$

Решая эти неравенства, получим множество точек (x, y) на плоскости, а значит, и множество значений z, для которых ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$$

сходится. При этом исходный функциональный ряд (3.48) на указанном множестве значений z называется **абсолютно сходящимся**.

3.13.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Для рядов функций комплексной переменной, так же как и рядов для функций действительной переменной, существенным является вопрос о характере сходимости функционального ряда, т. е. сходимость равномерная или нет. **Равномерно** сходящиеся ряды функций комплексной переменной, так же как и равномерно сходящиеся ряды функций действительной переменной, обладают рядом важных свойств, которые будут сформулированы ниже после определения и признака равномерной сходимости.

Если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $n(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > n(\varepsilon)$ и для всех значений z из области D выполняется неравенство $\left|S(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)\right| < \varepsilon$, то ряд $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ называется равномерно **сходящимся** в области D.

Важным для приложений является достаточный признак равномерной сходимости Вейерштрасса: если в области D для членов функционального ряда (3.48) для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|u_n(z)| \leqslant |a_n|$, где a_n есть члены абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд (3.48) сходится в области D равномерно.

3.13.3. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Если функции $u_n(z)$ непрерывны в области D и ряд (3.48) сходится в этой области равномерно к функции $f(z)$, то функция $f(z)$ непрерывна в области D.

Если ряд (3.48) сходится в области D равномерно к функции $f(z)$, функции $u_n(z)$ непрерывны в области D, то ряд (3.48) можно почленно интегрировать по любой кусочно-гладкой кривой L, целиком лежащей в области D, и справедливо равенство:

$$\int_L f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z)dz.$$

Если функции $u_n(z)$ — аналитические функции в области D и ряд (3.48) сходится равномерно к функции $f(z)$ в любой замкнутой подобласти $\bar{G}$ области D, то:

1) функция $f(z)$ аналитическая в области D;

2) ряд (3.48) можно почленно дифференцировать любое число раз и справедливо равенство

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z);$$

3) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$$

сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\bar{G}$ области D.

3.13.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

Если члены функционального ряда (3.48) являются степенными функциями, т. е. имеют вид $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$, где c_n — некоторые комплексные числа, а z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости, то такой функциональный ряд называется степенным рядом. Область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

определяется на основании **теоремы Абеля**: если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

сходится при некотором значении $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно и для всех значений z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, при этом в круге $|z - z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$ ряд сходится равномерно. Из теоремы Абеля следует:

1) если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

расходится в некоторой точке $z = z_2$, то он расходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$;

2) для любого степенного ряда существует такое действительное число r, называемое радиусом сходимости степенного ряда, что внутри круга $|z - z_0| < r$ степенной ряд сходится, а вне этого круга — расходится;

3) внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции;

4) степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, при этом радиус сходимости полученных степенных рядов равен радиусу сходимости исходного степенного ряда;

5) коэффициенты степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

выражаются через значения суммы ряда $f(z)$ и ее производных в центре круга сходимости z_0 по формуле:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0); \qquad (3.50)$$

6) радиус сходимости r степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

определяется формулой Коши–Адамара

$$r = \frac{1}{q},$$

где $q = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, есть верхний предел последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ (наибольшая предельная точка этой последовательности).

На практике чаще всего для нахождения области сходимости степенного ряда просто применяют достаточные признаки Даламбера и Коши, которые, как правило, приводят к необходимости решения соответственно следующих неравенств:

$$|z - z_0| \lim_{n \to \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1 \quad \text{или} \quad |z - z_0| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

откуда и получаются те значения $|z - z_0|$, для которых исследуемый степенной ряд сходится.

3.13.5. РЯД ТЕЙЛОРА

Из приведенных выше результатов следует, что степенной ряд внутри круга сходимости сходится к аналитической в нем функции. Возникает обратная задача: может ли функция, аналитическая внутри некоторого круга, быть представлена в нем в виде степенного ряда. Решение этой задачи дает теорема Тейлора: если функция $f(z)$ аналитическая внутри круга $|z - z_0| < r$, то она может быть однозначно представлена в нем сходящимся к ней степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Коэффициенты этого ряда с учетом формулы для производных аналитической функции определяются следующей формулой:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.51)$$

3.13.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

В теории функций комплексной переменной доказывается теорема о единственности определения аналитической функции, согласно которой, если аналитические в области D функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на некоторой линии L области D, то они тождественно равны в области D. Это позволяет автоматически распространить на комплексную плоскость элементарные функции действительной переменной. В частности, если на отрезке $[a, b]$ действительной оси x задана непрерывная функция $f(x)$ действительной переменной x, то в любой области D комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a, b]$, существует только одна аналитическая функция $f(z)$ комплексной переменной z, тождественно равная $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Функция $f(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(x)$ действительной переменной x в комплексную область D. Приведенные выше элементарные функции комплексной

переменной являются аналитическим продолжением соответствующих элементарных функций действительной переменной с действительной оси. Причем функции комплексной переменной e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ определяются так же, как суммы следующих степенных рядов, сходящихся во всей комплексной плоскости:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin z = \sum_{k-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Примеры.

3.25. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z-2$ функцию $f(z) = z^{-1}$.

Р е ш е н и е. Ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Его коэффициенты определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \{0, 1, 2\}.$$

В нашем примере

$$z_0 = 2, \quad f(z) = \frac{1}{z}.$$

Хорошо понятно, что

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}},$$

тогда

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}},$$

а значит,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n.$$

3.26. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z-i$ функцию $f(z)=z^k$, $k\in\mathbb{N}$.

Р е ш е н и е. Ряд Тейлора имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Его коэффициенты определяются формулой

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\in\{0,1,2,\ldots\}.$$

В нашем примере $z_0=i$, $f(z)=z^k$, $k\in\mathbb{N}$. Хорошо понятно, что:

$$\frac{d^nf(z)}{dz^n}=\begin{cases}z^k, & n=0;\\ k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)z^{k-n}, & \\ 0, & n>k,\end{cases}$$

$$1\leqslant n\leqslant k;=\begin{cases}\dfrac{k!}{(k-n)!}z^{k-n}, & 0\leqslant n\leqslant k;\\ 0, & n>k,\end{cases}$$

тогда

$$c_n=\frac{f^{(n)}(i)}{n!}=\begin{cases}\dfrac{k!i^{k-n}}{(k-n)!n!}, & 0\leqslant n\leqslant k;\\ 0, & n>k,\end{cases},$$

а значит:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{k}\frac{k!i^{k-n}}{(k-n)!n!}(z-i)^n+\sum_{n=k+1}^{+\infty}0=\sum_{n=0}^{k}\frac{k!i^{k-n}}{(k-n)!n!}(z-i)^n.$$

3.27. Разложить в ряд Тейлора (используя известные разложения) и найти радиусы сходимости рядов:

а) $\sin(3z+2)$ по степеням $z+1$;

б) e^z по степеням $2z+1$;

в) $\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$ по степеням z;

г) $\ln(3-z)$ по степеням z.

Р е ш е н и е.

а) Найдем разложение в ряд Тейлора функции $\sin(az+b)$ по степеням $z-c$, имеем:

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k \sin(az+b)}{dz^k} = \frac{a^k}{k!}\sin\left(az+b+\frac{\pi k}{2}\right).$$

Тогда:

$$\sin(az+b) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sin\left(ac+b+\frac{\pi n}{2}\right)(z-c)^n.$$

В нашем случае $a=3$, $b=2$, $c=-1$:

$$\sin(3z+2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\sin\left(-1+\frac{\pi n}{2}\right)(z+1)^n.$$

Эту задачу можно решить, не прибегая к вычислению коэффициентов c_k, следующим образом: мы знаем разложение $\sin z$ и $\cos z$ в ряд Маклорена:

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{и} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Соответственно преобразуем $\sin(3z+2)$ следующим образом:

$$\sin(3z+2) = \sin(3(z+1)-1) = \sin\{3(z+1)\}\cos 1 - \sin 1\cos\{3(z+1)\} =$$

$$= \cos 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\{3(z+1)\}^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\{3(z+1)\}^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cos(-1)\sin\frac{\pi n}{2}\{3(z+1)\}^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin(-1)\cos\frac{\pi n}{2}\{3(z+1)\}^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z+1)^n}{n!}\left(\cos(-1)\sin\frac{\pi n}{2} + \sin(-1)\cos\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\sin\left(-1+\frac{\pi n}{2}\right)(z+1)^n.$$

Установим радиус сходимости данного ряда, для чего применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(-1+\frac{\pi(n+1)}{2}\right)(z+1)^{n+1}}{\frac{3^n}{n!}\sin\left(-1+\frac{\pi n}{2}\right)(z+1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3|z+1|}{n+1}\left|\operatorname{ctg}\left(-1+\frac{\pi n}{2}\right)\right| = 0.$$

Таким образом, $R = +\infty$, т. е. найденный ряд сходится при любом z.

б) Найдем разложение в ряд Тейлора функции e^z по степеням $2z + 1$. Мы знаем разложение e^z в ряд Маклорена $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, откуда

$$e^z = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{z+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(2z+1)^n}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z+1)^n}{2^n n!}.$$

Установим радиус сходимости данного ряда, для чего применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(2z+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(2z+1)^n}{2^n n!}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2z+1}{2(n+1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|2z+1|}{2(n+1)} = 0.$$

Таким образом, $R = +\infty$, т. е. найденный ряд сходится при любом z.

в) Найдем разложение в ряд Тейлора функции

$$\frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}$$

по степеням z. Преобразуем выражение $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$:

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2} = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{2}{1-z}.$$

Применяя формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем:

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{2}{1-z} = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \ldots + \frac{z^n}{2^n} + \ldots\right) +$$

$$+ 2(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots) = -\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2} - 3}{2^{n+1}} z^n.$$

Установим радиус сходимости данного ряда, для чего применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+3}-3}{2^{n+2}}z^{n+1}}{\frac{2^{n+2}-3}{2^{n+1}}z^n}\right|=\frac{|z|}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+3}-3}{2^{n+2}-3}=|z|<1.$$

Таким образом, $R=1$, т. е. найденный ряд сходится при $|z|<1$. При $z=\pm1$ ряд расходится, так как не выполнено основное условие сходимости.

г) Найдем разложение в ряд Тейлора функции $\ln(3-z)$ по степеням z. Известно разложение

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

тогда, переписывая выражение $\ln(3-z)$, получим:

$$\ln(3-z)=\ln\left(3\left(1-\frac{z}{3}\right)\right)=\ln 3+\ln\left(1-\frac{z}{3}\right)=$$

$$=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{3}\right)^n=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n n}.$$

Установим радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n n}$, для чего применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{z^n}{3^n n}}\right|=\frac{|z|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|z|}{3}<1.$$

Таким образом, $R=3$, т. е. найденный ряд сходится при $|z|<3$. При $z=1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n n}\overset{z=3}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится, так как это не что иное, как гармонический ряд. При $z=-1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n n}\overset{z=-3}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

сходится условно, так как он расходится абсолютно и для него выполнены условия теоремы Лейбница для знакочередующегося ряда.

3.13.7. РЯД ЛОРАНА

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется рядом Лорана. Здесь c_n — некоторые комплексные числа, называемые коэффициентами ряда, а z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости. Так как степенной ряд по неотрицательным степеням $(z - z_0)$, т. е.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

называемый правильной частью ряда Лорана, сходится в круге $|z - z_0| < R_2$, а по отрицательным, т. е.

$$f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n,$$

называемый также главной частью ряда Лорана, сходится вне круга $|z - z_0| > R_1$, то в случае, когда $R_1 < R_2$, областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо, т. е. множество комплексных чисел, удовлетворяющих условию $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

Так как правильная и главная части ряда Лорана являются обычными степенными рядами, то в указанном круговом кольце функция $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, являющаяся суммой ряда Лорана, обладает всеми свойствами суммы степенного ряда. Последнее означает, что ряд Лорана сходится внутри своего кольца сходимости к некоторой функции $f(z)$, аналитической в этом кольце.

Теорема Лорана. Любая функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в круговом кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся к ней рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Коэффициенты этого ряда, как и коэффициенты ряда Тейлора, определяются той же формулой:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где L — произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$ и содержащий точку z_0 внутри.

Вычислять коэффициенты ряда Лорана с помощью интегралов неудобно. Поэтому во многих случаях для получения ряда Лорана конкретной функции используются различные виды разложений в ряды. Приводимые ниже примеры иллюстрируют указанный подход.

3.13.8. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Пусть функция $f(z)$ задана в некоторой области D, ограниченной контуром L. Точка $z_0 \in \bar{D}$ называется правильной точкой функции $f(z)$, если существует степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

в общей части области D и своего круга сходимости $|z - z_0| < r (r > 0)$, сходящийся к функции $f(z)$. Точки $z \in \bar{D}$, не являющиеся правильными точками функции $f(z)$, называются особыми точками функции $f(z)$. В частности, если функция $f(z)$ является аналитической в области D, то все внутренние точки этой области являются правильными точками этой функции. Точки границы L области D могут быть как правильными, так и особыми точками аналитической функции $f(z)$. Все точки границы L, лежащие внутри круга $|z - z_0| < r$ с центром в некоторой правильной точке $z_0 \in \bar{D}$, также являются правильными точками функции $f(z)$.

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в круговом кольце $0 < |z - z_0| < r$, а точка z_0 является особой точкой функции $f(z)$. Особые точки функции $f(z)$ классифицируются в зависимости от вида ее ряда

Лорана в указанном кольце. Возможны следующие три случая:

1. Ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$. В этом случае точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$. Название «устранимая особая точка» связано с тем, что такую особую точку можно «устранить», доопределив функцию $f(z)$ в этой точке таким образом, чтобы в точке z_0 выполнялось условие $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, вместо изначально имеющего место равенства $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$, где $c_0 \neq f(z_0)$. Тем самым особенность в точке z_0 устраняется и новая функция, представленная степенным рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, в котором уже $c_0 = f(z_0)$, будет аналитической во всей окрестности точки z_0, включая и саму точку z_0.

2. Ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т. е. $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. В этом случае точка z_0 называется полюсом порядка m функции $f(z)$. Если точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа предельного перехода к точке z_0, т. е. $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$.

3. Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т. е. $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. В этом случае точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$. Поведение функции в окрестности ее существенно особой точки определяется теоремой Сохоцкого–Вейерштрасса: если точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, то, каково

бы ни было число $\varepsilon > 0$, в любой окрестности точки z_0 найдется хотя бы одна точка z_1, в которой значение $f(z)$ отличается от произвольно заданного комплексного числа A на величину меньше, чем ε.

3.13.9. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(z)$ есть аналитическая функция в области D. Точка $z_0 \in D$ называется нулем $f(z)$, если в этой точке выполняется условие $f(z_0) = 0$. Так как $f(z)$ аналитическая функция, то из ее разложения в степенной ряд в окрестности точки z_0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, вытекает, что $c_0 = 0$. В том случае, когда не только коэффициент c_0 равен нулю, но и коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ равны нулю, а коэффициент $c_m \neq 0$, точка z_0 называется нулем m-го порядка функции $f(z)$. Очевидно, что в нуле m-го порядка не только сама функция, но и ее производные до $(m-1)$-го порядка равны нулю, а m-я производная уже отлична от нуля. Таким образом, в окрестности нуля m-го порядка разложение функции $f(z)$ в степенной ряд будет иметь следующий вид:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m g(z),$$

где функция $g(z)$ также аналитическая в окрестности точки z_0, в которой ее разложение в степенной ряд имеет вид

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n \text{ и } g(z_0) \neq 0.$$

Примеры.

3.28. Разложить по степеням z в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$:

а) в кольце $1 < |z| < 2$;

б) в кольце $1 < |z - 1| < 2$;

в) в кольце $1 < |z - 2| < 2$.

Р е ш е н и е. Функция

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

имеет две изолированные особые точки $z=1$ и $z=2$.

а) В кольце $1<|z|<2$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана[3]:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-2}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k z^k,\quad \begin{cases} c_k=2^{1-k}, & k\geqslant 0;\\ c_k=1, & k\leqslant -1.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что полученный ряд Лорана сходится в кольце $1<|z|<2$.

б) В кольце $1<|z-1|<2$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}+\frac{-1}{1-(z-1)}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k=-\sum_{k=-1}^{\infty}(z-1)^k.$$

Нетрудно убедиться, что полученный ряд Лорана сходится в кольце $1<|z-1|<2$.

в) В кольце $1<|z-2|<2$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1-(2-z)}=\frac{1}{z-2}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(2-z)^k=\frac{1}{z-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^k=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^k.$$

---

[3] Читателю легко запомнить следующее мнемоническое правило, говорящее о том, по степеням выражения какого вида нужно получить разложение в ряд Лорана: «если нужно разложить аналитическую функцию $f(z)$ в кольце $a<|z-b|<c$, то ее ряд Лорана должен иметь вид $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k$». **Причем нужно смотреть, чтобы область сходимости полученного ряда содержала множество $a<|z-b|<c$.**

Нетрудно убедиться, что полученный ряд Лорана сходится в кольце $1 < |z-2| < 2$.

3.29. Разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z-ia| < a$ функцию $f(z) = \dfrac{2ia}{z^2+a^2}$, где a — действительное положительное число.

Р е ш е н и е. В кольце $0 < |z-ia| < a$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{2ia}{z^2+a^2} = \frac{2ia}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} = \frac{1}{z-ia} -$$

$$- \frac{1}{2ia}\frac{1}{1+\dfrac{z-ia}{2ia}} = \frac{1}{z-ia} - \frac{1}{2ia}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{ia-z}{2ia}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{z-ia} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(z-ia)^k}{2^{k+1}i^{k+1}a^{k+1}} = \frac{1}{z-ia} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^{k-1}(z-ia)^k}{2^{k+1}a^{k+1}}.$$

3.30. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2+4z+3}$ в кольце $2 < |z+1| < +\infty$.

Р е ш е н и е. Функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки, а именно $z = -1$ и $z = -3$. В кольце $2 < |z+1| < +\infty$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2+4z+3} = \frac{z+2}{(z+3)(z+1)} = \frac{z+2}{(z+1)\left(1+\dfrac{2}{z+1}\right)} =$$

$$= \frac{z+2}{z+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z+1)^k} = (z+2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z+1)^{k+1}}.$$

3.31. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^k \sin\frac{1}{z^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

в окрестности точки $z = 0$.

Р е ш е н и е. Функция $f(z)$ имеет изолированную особую точку $z = 0$. В окрестности $0 < |z| < a$, $a > 0$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z) = z^k \sin\frac{1}{z^k} = z^k \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{1}{z^k}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2k(1-n)}}{(2n-1)!}.$$

3.32. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{3z+4}{z^2-5z+6}$ в окрестности ее особых точек.

Р е ш е н и е. Функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки: $z=2$ и $z=3$. В окрестности $0<|z-2|<\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{3z+4}{z^2-5z+6}=\frac{3z+4}{(z-2)(z-3)}=\frac{-10}{z-2}+\frac{13}{z-3}=$$

$$=\frac{-10}{z-2}+\frac{-13}{1-(z-2)}=\frac{-10}{z-2}-13\sum_{k=0}^{\infty}(z-2)^k.$$

В окрестности $0<|z-3|<\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ функция $f(z)$ аналитична, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{3z+4}{z^2-5z+6}=\frac{3z+4}{(z-2)(z-3)}=\frac{-10}{z-2}+\frac{13}{z-3}=$$

$$=\frac{13}{z-3}+\frac{-10}{1+(z-3)}=\frac{13}{z-3}+10\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-3)^k.$$

3.13.10. ВЫЧЕТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Пусть функция $f(z)$ есть однозначная аналитическая функция в области D за исключением изолированной особой точки z_0 этой функции. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(\xi)d\xi,$$

взятому в положительном направлении по любому замкнутому контуру γ, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему единственную особую точку z_0. Из формулы для коэффициентов ряда Лорана следует, что вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} в разложении этой функции в ряд Лорана. Для обозначения вычета используются обозначения: $\operatorname{res}[f(z_0), z_0]$ или $\text{Выч}[f(z_0), z_0]$. Очевидно, что если точка z_0 является правильной или устранимой особой точкой функции $f(z)$, то вычет этой функции в такой

точке равен нулю. Это следует из того, что в разложении такой функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки одного из указанных типов коэффициент $c_{-1} = 0$. В случае, когда точка z_0 является полюсом порядка m, вычет равен:

$$\operatorname{res}[f(z_0), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Если точка z_0 является полюсом первого порядка (простым полюсом), то вычет функции $f(z)$ в этом случае равен:

$$\operatorname{res}[f(z_0), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

В случае простого полюса в точке z_0 функция $f(z)$ в окрестности этой точки может быть представлена в виде отношения двух аналитических функций $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, причем в точке z_0 выполняется условие $f_1(z_0) \neq 0$, а сама точка z_0 является нулем первого порядка функции $f_2(z)$. В этом случае вычет в точке z_0 может быть вычислен по формуле:

$$\operatorname{res}[f(z_0), z_0] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

Основная теорема теории вычетов. Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой конечной области $\bar{D}$, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри области D, тогда

$$\int_L f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{m=1}^{n} \operatorname{res}[f(z_k), z_k],$$

где интеграл в левой части записанного равенства берется по границе области $\bar{D}$, проходимой в положительном направлении.

Большое практическое значение этой формулы состоит в том, что во многих случаях вычисление интеграла по замкнутому контуру, на основании основной теоремы теории вычетов, можно заменить вычислением вычетов функции $f(z)$ в особых точках этой функции, лежащих внутри области, ограниченной контуром интегрирования.

Примеры.

3.33. Вычислить

$$\int_L \frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}dz,$$

где L — окружность $|z|=1$.

Р е ш е н и е. Особой точкой подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}$ является точка $z=-\frac{\pi i}{2}$, представляющая собой полюс второго порядка. Других особых точек у функции $f(z)$ в области, ограниченной окружностью $|z|=1$, нет. Поэтому по основной теореме о вычетах имеем:

$$\int_L \frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}, -\frac{\pi i}{2}\right).$$

По общей формуле вычисления вычета в полюсе n-го порядка, а в данном случае при $n=2$, имеем:

$$\operatorname{res}\left(\frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}, -\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}}\frac{d}{dz}\left[\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2\cdot\frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}}\frac{d}{dz}e^{2z} = \lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}}e^{2z} = e^{-\pi i} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i.$$

Следовательно,

$$\int_L \frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2}dz = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi.$$

3.34. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz,$$

где L — прямоугольник, ограниченный следующими прямыми: $x=2$, $x=-1$, $y=2$, $y=-1$.

Р е ш е н и е. Особыми точками подынтегральной функции, имеющей в данном примере вид

$$f(z)=\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)},$$

являются точки $z=0$ и $z=\frac{\pi}{2}$. Точка $z=0$ является устранимой особой точкой подынтегральной функции, так как в этой точке

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\lim_{z\to 0}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому в этой точке

$$\operatorname{res}\left(\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)},\ 0\right)=0.$$

Точка $z=\frac{\pi}{2}$ является простым полюсом подынтегральной функции. Поэтому в соответствии с формулой вычисления вычета в простом полюсе имеем:

$$\operatorname{res}\left(\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)},\ \frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z}{z}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Теперь по основной теореме о вычетах получим

$$\int_L\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz=2\pi i\left(\operatorname{res}\left(\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)},\ 0\right)+\operatorname{res}\left(\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2\pi i i\left(0+\frac{2}{\pi}\right)=4i.$$

3.35. Найти

$$\int_L\sin\frac{i}{z}dz,$$

где L — окружность радиуса $r>0$, т. е. $|z|=r$.

Р е ш е н и е. В области комплексной плоскости, ограниченной указанной окружностью, подынтегральная функ-

ция $f(z)=\sin\frac{i}{z}$ имеет единственную особую точку $z=0$, которая является существенно особой точкой этой функции. Действительно, разложение этой функции в ряд Лорана в кольце $0<|z|<r$ имеет вид

$$\sin\frac{i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{i}{z}\right)^{2n+1}=\frac{i}{z}-\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{z}\right)^3+\ldots.$$

Из приведенного разложения подынтегральной функции в ряд Лорана следует, что коэффициент $c_{-1}=i$. Следовательно, $\operatorname{res}\left(\sin\frac{i}{z},\ 0\right)=c_{-1}=i$. В соответствии с основной теоремой теории вычетов имеем:

$$\int_L\sin\frac{i}{z}dz=2\pi i\operatorname{res}\left(\sin\frac{i}{z},\ 0\right)=2\pi i\cdot i=2\pi i^2=2\pi(-1)=-2\pi.$$

3.36. Вычислить

$$\int_L\frac{e^{2z}}{z^4+5z^2-9}dz,$$

где L — окружность радиуса $|z|=\frac{5}{2}$.

Р е ш е н и е. Представим подынтегральную функцию

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{z^4+5z^2-9}$$

в виде:

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)(z+2)(z-3i)(z+3i)},$$

т. е. разложим знаменатель на множители. Из полученного представления подынтегральной функции следует, что она имеет четыре особые точки: $z_1=2$, $z_2=-2$, $z_3=3i$, $z_4=-3i$. В область, ограниченную указанной в условии окружностью, попадают только две точки: $z_1=2$ и $z_2=-2$. Точки z_3, z_4 лежат вне круга $|z|\leqslant\frac{5}{2}$ и поэтому, в соответствии с теоремой о вычетах, вклад в значение вычисляемого интеграла не вносят. Тогда в соответствии с теоремой о вычетах имеем:

$$\int_L \frac{e^{2z}}{z^4+5z^2-9}dz = 2\pi i(\operatorname{res}(f(z),\ 2)+\operatorname{res}(f(z),\ -2)) =$$

$$= 2\pi i\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{(z-2)e^{2z}}{(z-2)(z+2)(z-3i)(z+3i)}+\\ +\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{(z+2)e^{2z}}{(z-2)(z+2)(z-3i)(z+3i)}\end{array}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^4}{4\cdot(2-3i)(2+3i)}+\frac{e^{-4}}{(-4)4\cdot(2-3i)(2+3i)}\right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{52}(e^4-e^{-4}) = \frac{\pi i}{13}\operatorname{sh}4.$$

3.13.11. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

Функция $g(z)=\dfrac{d}{dz}\ln f(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ называется логарифмической производной функции $f(z)$, а вычеты функции $g(z)$ в ее особых точках z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — логарифмическими вычетами. Так как в окрестности нуля порядка n_i функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=(z-z_i)^{n_i}f_1(z)$, где $f_1(z_i)\neq 0$, а в окрестности полюса порядка p_m

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-z_m)^{p_m}},$$

где функция $f_1(z_m)\neq 0$, то $g(z)=(\ln f(z))'=\dfrac{n_i}{(z-z_i)}+\dfrac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ в окрестности нуля порядка n_i и

$$g(z)=(\ln f(z))'=-\frac{p_m}{(z-z_m)}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

в окрестности полюса порядка p_m. Причем в обоих случаях, и в нуле порядка n_i, и в полюсе порядка p_m, функция $f_1(z)$ не имеет особенностей, а указанные точки являются ее правильными точками. Отсюда следует, что нуль порядка n_i и полюс порядка p_m функции $f(z)$ являются полюсами первого порядка функции $g(z)$, вычеты в которых соответственно равны n_i и $-p_m$. Отсюда следует справедливость следующей **теоремы**. Если функция $f(z)$ является анали-

тической в замкнутой области $\bar{D}$ всюду, за исключением конечного числа полюсов z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), лежащих внутри области $\bar{D}$, и функция $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы L области $\bar{D}$, тогда сумма логарифмических вычетов функции $f(z)$ области $\bar{D}$ равна разности между N — полным числом нулей z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), и P — полным числом полюсов $\tilde{z}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, p$), функции $f(z)$ в области $\bar{D}$ с учетом их кратности.

С учетом приведенного выше определения вычета, аналитическое представление сформулированной теоремы имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P,$$

где $N = \sum_{k=1}^{n} n_k$, $P = \sum_{i=1}^{p} p_i$.

Геометрический смысл приведенной теоремы вытекает из следующего представления левой части последнего равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln z dz = \frac{1}{2\pi i}\int_L d(|\ln f(z)| + i\arg f(z)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L d|\ln f(z)| + \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg f(z).$$

Действительная функция $|\ln f(z)|$ является однозначной функцией, поэтому ее изменение при обходе замкнутого контура L равно нулю. Следовательно, первое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Второе слагаемое в правой части указанного равенства представляет собой полную вариацию аргумента функции $f(z)$ при обходе точкой z замкнутого контура L (в положительном направлении), деленную на 2π. Таким образом,

$$N - P = \frac{\Delta\arg f(z)}{2\pi}.$$

Это равенство означает, что разность между полным числом нулей и полюсов функции $f(z)$ равна числу оборотов относительно нулевой точки контура C, являющегося образом контура L при отображении $w = f(z)$. Этот результат носит название **принцип аргумента**.

3.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции действительной переменной $f(t)$ функцию $\bar{f}(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + i\omega$ с помощью соотношения

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt. \qquad (3.52)$$

Как видно из (3.52), преобразование Лапласа представляет собой интегральное преобразование, что позволяет при решении краевых задач для уравнений теплопроводности и диффузии, а также при решении обыкновенных дифференциальных уравнений реализовать основную идею метода интегральных преобразований: получить в результате применения метода более простую задачу, решение которой может быть сравнительно легко получено, а затем с помощью обратного преобразования найти искомое решение. Во многих случаях такой подход позволяет существенно облегчить технику вычислений, что будет проиллюстрировано далее на примере решения конкретных задач физического содержания.

Возвращаясь к (3.52), отметим, что в операционном исчислении $f(t)$ называется оригиналом, а $\bar{f}(p)$ — изображением.

Переход от оригинала к изображению с помощью преобразования (1) обозначают символом $f(t) \dot{\longrightarrow} \bar{f}(p)$ (читается: функция $f(t)$ переходит в $\bar{f}(p)$) или $\bar{f}(p) \dot{\longleftarrow} f(t)$ (функция $\bar{f}(p)$ является изображением для $f(t)$). Наряду с указанными применяются также обозначения:

$$L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = f(t),$$

где

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \quad \text{или} \quad f(t) \doteqdot \bar{f}(p)$$

(функция $f(t)$ имеет своим изображением $\bar{f}(p)$).

Естественно, что не для всякой функции несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом в правой части (1) имеет смысл. Преобразование Лапласа применя-

ется для функций $f(t)$, определенных для всех значений действительной переменной $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$;

2) при $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ на любом конечном промежутке действительной оси Ot имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;

3) при $t \to +\infty$ функция имеет ограниченную степень роста, т. е. для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные постоянные M и a, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}. \tag{3.53}$$

Точная нижняя грань тех значений a, для которых имеет место неравенство (3.53), называется показателем роста функции $f(t)$.

Введем теперь **основное определение.**

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ действительной переменной t называется преобразование, ставящее в соответствие функцию $\bar{f}(p)$ комплексной переменной p, определенную с помощью интеграла (3.52).

Так как несобственный интеграл в (3.52) зависит от переменной p как от параметра, то он, вообще говоря, сходится не при всех значениях параметра p. Ответ на вопрос о сходимости несобственного интеграла (3.52) дает следующая **теорема.** Интеграл (3.52) сходится в области $\operatorname{Re} p > a$, где a — показатель степени роста функции $f(t)$, причем в области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_0 > a$ этот интеграл сходится равномерно.

(Напомним, что действительная часть любой функции комплексной переменной $\varphi(p)$ обозначается $\operatorname{Re}\varphi(p)$, а мнимая — $\operatorname{Im}\varphi(p)$. Таким образом, $\varphi(p) = \operatorname{Re}\varphi(p) + i \operatorname{Im}\varphi(p)$, где i — мнимая единица ($i^2 = -1$).)

Отметим, что в практических приложениях часто используется преобразование Лапласа–Карсона, которое определяется следующим образом:

$$\bar{f}(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt,$$

и отличается от преобразования Лапласа (3.52) дополнительным множителем p. Очевидно, что свойства преобразования Лапласа–Карсона легко могут быть получены из свойств преобразования Лапласа, к рассмотрению которых мы переходим.

3.14.1. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Линейность изображения (теорема сложения).

Если $\overline{f_i}(p) \doteqdot f_i(t)$, $\operatorname{Re} p > a_i$, $i = \overline{1,n}$, то

$$\overline{f}(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{f_i}(p) \doteqdot \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t), \quad \operatorname{Re} p > \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i,$$

где c_i — заданные постоянные числа (действительные и комплексные), a_i — показатель степени роста функции $f_i(t)$.

2. Теорема подобия.

Если $f(t) \doteqdot \overline{f}(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, $\lambda > 0$, тогда:

$$f(\lambda t) = \frac{1}{\lambda} \overline{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0.$$

3. Теорема запаздывания.

Пусть $\overline{f}(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, $\tau > 0$, и задана функция

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ f(t-\tau), & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Тогда

$$f_\tau(t) \doteqdot \overline{f_\tau}(p) = e^{-p\tau} \overline{f}(p).$$

4. Изображение производной.

Если функция $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \doteqdot \overline{f}(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то:

$$f'(t) \doteqdot p\overline{f}(p) - f(0).$$

5. Изображение n-й производной.

Если функция $f^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \doteqdot \overline{f}(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то:

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \overline{f}(p) - p^{n-1} f'(0) - p^{n-2} f''(0) - \ldots - f(0).$$

6. Изображение интеграла.

Пусть $f(t) \doteqdot \overline{f}(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\overline{f}(p).$$

7. Изображение свертки (теорема Бореля).

Сверткой функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (иногда обозначается $f_1(t)*f_2(t)$) называется функция $\varphi(t)$, определенная соотношением:

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Для функции $\varphi(t)$ справедливо следующее свойство: если $f_1(t) \doteqdot \overline{f_1}(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$ и $f_2(t) \doteqdot \overline{f_2}(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, то при $\operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}$ верно равенство:

$$\varphi(t) \doteqdot \overline{f_1}(p)\overline{f_2}(p).$$

8. Дифференцирование изображения.

Пусть $\overline{f}(p) \doteqdot f(t)$ и выполняется условие $\operatorname{Re} p > a$. Тогда

$$\overline{f}'(p) \doteqdot -tf(t).$$

Так как умножение функции $f(t)$ на любую степенную функцию t^n, $n \in \mathbb{N}$ не меняет ее показателя роста, то справедливо также следующее свойство, вытекающее из свойства 8:

9. n-я производная изображения.

Если $\overline{f}(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, то:

$$\overline{f}^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t).$$

10. Интегрирование изображения.

Если функция $\dfrac{f(t)}{t}$ удовлетворяет условиям существования изображения, причем $f(t) \doteqdot \overline{f}(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt = \int_p^{+\infty} \overline{f}(q)dq.$$

11. Теорема смещения.

Если $\bar{f}(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, то для любого комплексного числа λ справедливо равенство:

$$\bar{f}(p+\lambda) \doteqdot e^{-\lambda t} f(t), \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda.$$

Решение исходной краевой задачи в пространстве изображений позволяет получить изображение ее решения. Для того чтобы найти окончательно решение краевой задачи, необходимо уметь находить оригинал по данному изображению. В настоящее время имеются обширные таблицы изображений и оригиналов преобразования Лапласа и не менее часто используемого преобразования Лапласа–Карсона (5), что позволяет сравнительно легко получить решение поставленной задачи. В том случае, когда для полученного изображения в таблице нет соответствующего ему оригинала, необходимо воспользоваться формулой обращения преобразований Лапласа.

3.14.2. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ

Теорема. Пусть известно, что заданная функция $\bar{f}(p)$ в области $\operatorname{Re} p > a$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t и имеет показатель роста a. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp, \quad \sigma > a.$$

3.14.3. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ

Пусть изображения $\bar{f}(p)$ функции $f(t)$ можно представить как отношение двух полиномов:

$$\bar{f}(p) = \frac{\bar{\varphi}(p)}{\bar{\psi}(p)},$$

где

$$\bar{\varphi}(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m,$$

$$\bar{\psi}(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n.$$

Отметим, что $n > m$, так как в случае $m \geqslant n$ оригинал функции, соответствующей выделяемой при этом целой

части (т. е. полинома), представляет некоторую разрывную функцию особого рода (обобщенную функцию). Полином $\overline{\psi}(p)$ имеет n (возможно комплексных) корней p_i, $i=\overline{1,n}$. При этом возможны следующие два случая: полином $\overline{\psi}(p)$ имеет только простые корни и полином $\overline{\psi}(p)$ имеет кратные корни. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

1. Полином имеет простые корни.

Пусть все корни различны, т. е.

$$\overline{\psi}(p)=a_n(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n),$$

тогда:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{\varphi}(p_k)}{\overline{\psi}'(p_k)}e^{p_kt}.$$

Обобщение теоремы. Теорема разложения справедлива и для случая, когда изображение $\overline{f}(p)$ есть отношение трансцендентных функций $\overline{\varphi}(p)$ и $\overline{\psi}(p)$. В теории функций комплексной переменной доказывается, что такая функция разлагается в ряд по простейшим дробям. В результате получим то же соотношение.

Если соотношение двух целых трансцендентных функций можно привести к отношению двух сходящихся степенных рядов с показателями степени в виде натуральных чисел (обобщенных полиномов), т. е.

$$\overline{\varphi}(p)=b_0+b_1p+b_2p^2+\ldots+b_mp^m+\ldots,$$
$$\overline{\psi}(p)=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n+\ldots$$

($\overline{\psi}(p)$ не имеет свободного члена), то рассмотренная выше теорема разложения может быть распространена и на этот случай. При этих условиях можно показать, что оригинал $f(t)$ имеет вид:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\overline{\varphi}(p_k)}{\overline{\psi}'(p_k)}e^{p_kt}.$$

2. Полином имеет кратные корни.

В этом случае $\overline{\psi}(p)=a_n(p-p_1)^{n_2}(p-p_2)^{n_1}\ldots(p-p_s)^{n_s}$ и оригинал $f(t)$ определяется выражением:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left\{\frac{\overline{\varphi}(p)}{\overline{\psi}(p)}(p-p_k)^{n_k}e^{p_kt}\right\}.$$

Частный случай теоремы разложения (первая теорема разложения): если $\bar{f}(p)$ можно разложить в сходящийся степенной ряд:

$$\bar{f}(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k p^{-k},$$

то $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!}$.

3.14.4. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

Эта теорема представляет большой интерес для практики, так как в ряде случаев при решении краевых задач теплопроводности и диффузии достаточно ограничиться знанием температурного поля или распределения концентрации растворенного вещества для начальных моментов времени от начала процесса тепло- или массопереноса или, наоборот, для больших (по сравнению с характерным временем процесса) времен. Преобразование Лапласа в этом отношении обладает полезным свойством, состоящим в том, что по асимптотическому поведению изображения $\bar{f}(p)$ можно найти соответствующее асимптотическое поведение оригинала.

Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема. Если $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной $f'(t)$ и $\bar{f}(p) \doteqdot f(t)$, то

$$\lim_{p\to\infty} p\bar{f}(p) = f(0),$$

где $p \to \infty$ внутри угла $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \sigma$ $(\sigma > 0)$ и $f(0)$ понимается как $f(0) = \lim\limits_{t\to 0+0} f(t)$; если, кроме того, существует

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty), \text{ то } \lim_{p\to 0} p\bar{f}(p) = f(+\infty),$$

где $p \to 0$ внутри того же угла.

3.14.5. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ НЕПОСРЕДСТВЕННО С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТАБЛИЦ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Заметим предварительно, что в таблице 3.1, 3.2 и в каждом из приведенных ниже примеров указывается только значение $f(t)$ при $t > 0$ (всегда имеется в виду, что $f(t) = 0$, если $t < 0$).

3.37. Найти изображение следующих функций: а) $f(t)=1$; б) $f(t)=t$; в) $f(t)=e^{-kt}$.

Р е ш е н и е.

$$\text{а) } \bar{f}(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha} e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{\alpha\to+\infty} e^{-pt}\Big|_0^{\alpha}=-\frac{1}{p}\lim_{\alpha\to+\infty}(e^{-\alpha p}-1)=\frac{1}{p}$$

(так как $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\alpha t}=0$, $\operatorname{Re} p>0$).

б) Находим изображение $f(t)$ интегрированием по частям:

$$u=t\Rightarrow du=dt,\quad dv=e^{-pt}dt\Rightarrow v=-\frac{1}{p}e^{-pt},$$

$$\bar{f}(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}t\,dt=-\frac{1}{p}\lim_{\alpha\to+\infty}(te^{-pt})\Big|_0^{\alpha}+\frac{1}{p}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}e^{-pt}dt=$$

$$=0+\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{p^2}.$$

$$\text{в) } \bar{f}(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-kt}dt=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}e^{-(p+k)t}dt=\frac{1}{p+k},\quad (k\neq -p).$$

3.38. Найти изображение следующих функций, пользуясь таблицей 3.2 и свойствами изображений:

а) $f(t)=a^t$; б) $f(t)=\cos^3 t$;

в) $f(t)=\operatorname{sh} bt$; г) $f(t)=\operatorname{sh} at\sin bt$; д) $f(t)=t\operatorname{sh} at$.

Р е ш е н и е.

а) Представим функцию $f(t)=a^t$ в виде $f(t)=e^{t\ln a}$ и применим формулу 4 в таблице 3.2 изображений, приняв $\alpha=\ln a$, получим:

$$e^{t\ln a}\doteq\frac{1}{p-\ln a},\quad \text{т. е. } a^t\doteq\frac{1}{p-\ln a}.$$

б) По формуле Эйлера $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, тогда

$$\cos^3 t=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it})=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}+\frac{3}{4}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t.$$

Пользуясь свойством линейности изображений и формулой 6 таблицы 3.2, а именно $\cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$, получим:

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t \doteqdot \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1} = \frac{p^3+7p}{p^4+10p^2+9}.$$

В первом случае $\omega = 3$, во втором — $\omega = 1$.

в) По определению гиперболического синуса имеем

$$\operatorname{sh} bt = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}.$$

Так как по формуле 4 из таблицы 3.2 $e^{bt} \doteqdot \frac{1}{p+b}$, а также по свойству линейности изображения получим:

$$\operatorname{sh} bt \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p+b}\right) = \frac{b}{p^2-b^2}.$$

г) Так как $\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$, то

$$f(t) = \operatorname{sh} at \sin bt = \frac{1}{2}e^{at}\sin bt - \frac{1}{2}e^{-at}\sin bt.$$

Применим формулу 12 таблицы 3.2 ($\omega = b$, $\lambda = a$ в первом слагаемом и $\lambda = -a$ — во втором):

$$e^{at}\sin bt \doteqdot \frac{b}{(p-a)^2 - b^2}, \quad e^{-at}\sin bt \doteqdot \frac{b}{(p+a)^2 - b^2},$$

получим:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2}\frac{b}{(p-a)^2-b^2} - \frac{1}{2}\frac{b}{(p+a)^2-b^2} =$$

$$= \frac{2pab}{((p-a)^2+b^2)((p+a)^2+b^2)} = \frac{2pab}{(p^2-a^2-b^2)^2+4p^2b^2}.$$

д) Пользуясь определением гиперболического косинуса, можно записать

$$f(t) = t\operatorname{sh} at = \frac{te^{at} - te^{-at}}{2}.$$

Применяя формулу 9 таблицы 3.2 ($te^{at} \doteqdot \frac{1}{(p-a)^2}$, приняв $n = 1$, $\alpha = a$ в первом слагаемом и $\alpha = -a$ во втором слагаемом), получим:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-a)^2} - \frac{1}{2(p+a)^2} = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}.$$

3.14.6. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛА ОТ ОРИГИНАЛА

3.39. Найти изображение:

а) $y''(t) - y'(t) - y(t)$, если $y(0) = y'(0) = 0$ и $\bar{y}(p) \doteqdot y(t)$;

б) $y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau$, если $y(0) = 1$ и $\bar{y}(p) \doteqdot y(t)$.

Р е ш е н и е. а) По теореме дифференцирования оригинала (см. формулы 3–4 таблицы 3.1) имеем:

$$y'(t) \doteqdot p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}(p),$$
$$y''(t) \doteqdot p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y}(p).$$

Отсюда находим с учетом свойства линейности:

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \doteqdot (p^2 - p - 1)\bar{y}(p).$$

б) По теореме дифференцирования и интегрирования оригинала имеем:

$y'(t) \doteqdot p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}(p) - 1$ (формула 3 таблицы 3.1),

$\int_0^t y(\tau)d\tau \doteqdot \dfrac{\bar{y}(p)}{p}$ (формула 5 таблицы 3.1).

Отсюда находим:

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau \doteqdot$$

$$\doteqdot p\bar{y}(p) - 1 + \bar{y}(p) + \frac{\bar{y}(p)}{p} = \frac{p^2 + p + 1}{p}\bar{y}(p) - 1.$$

3.14.7. ОТЫСКАНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения и свертки функций.

3.40. Найти оригиналы следующих функций:

а) $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$; б) $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$;

в) $\bar{f}(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.

Р е ш е н и е. а) Используем элементарные приемы для разложения этой дроби на сумму таких дробей, оригиналы которых известны по таблице:

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}$$

(в знаменателе выделили полный квадрат).

По формулам 13, 12 таблицы 3.2 имеем:

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\doteq e^t\cos 2t \quad (\lambda=1,\ \omega=2),$$

$$\frac{1}{(p-1)^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+4}\doteq\frac{1}{2}e^t\sin 2t \quad (\lambda=1,\ \omega=2).$$

Поэтому

$$\frac{p}{p^2-2p+5}\doteq e^t\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

б) В этом примере используем элементарные приемы разложения, известные из интегрального исчисления. Разложим данную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p^3+8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Для определения коэффициентов имеем тождество:

$$1\equiv A(p^2+2p+4)+(Bp+C)(p-2),$$
$$1\equiv (A+B)p^2+(2A-2B+C)p+(4A-2C).$$

Это тождество, очевидно выполнено для тех троек чисел (A, B, C), которые являются решениями системы:

$$\begin{cases} A+B=0,\\ 2A-2B+C=0,\\ 4A-2C=1. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что:

$$(A, B, C) = \left(\frac{1}{12};\ -\frac{1}{12};\ -\frac{1}{3}\right).$$

Следовательно:

$$\frac{1}{p^3+8} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{p+4}{p^2+2p+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right).$$

Отсюда, используя формулы 4, 13, 12 таблицы 3.2, имеем:

$$\frac{1}{p-2} \doteqdot e^{2t} \quad (\alpha = 2),$$

$$\frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} \doteqdot e^{-t}\cos\sqrt{3}t \quad \left(\lambda = -1,\ \omega = \sqrt{3}\right),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} \doteqdot e^{-t}\sin\sqrt{3}t \quad \left(\lambda = -1,\ \omega = \sqrt{3}\right),$$

$$f(t) = \frac{1}{12}\left(e^{2t} - e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t\right).$$

в) Поскольку в данном случае все корни знаменателя действительные и простые (однократные), лучше всего воспользоваться теоремой разложения — формулой 15 таблицы 3.1. Имеем:

$$\overline{f_1}(p) = p+1,$$

$$\overline{f_2}(p) = p(p-1)(p-2)(p-3) \equiv p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p,$$

$$\overline{f_2}'(p) = 4p^3 - 18p^2 + 22p - 6.$$

Находим корни уравнения $\overline{f_2}(p) = 0$: $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 2$, $p_4 = 3$. Далее получим:

$$\frac{\overline{f_1}(p_1)}{\overline{f_1}'(p_1)} = -\frac{1}{6},\quad \frac{\overline{f_1}(p_2)}{\overline{f_1}'(p_2)} = 1,\quad \frac{\overline{f_1}(p_3)}{\overline{f_1}'(p_3)} = -\frac{3}{2},\quad \frac{\overline{f_1}(p_4)}{\overline{f_1}'(p_4)} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда по формуле 15 таблицы 3.1 находим:

$$f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}.$$

3.41. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $\bar{f}(p) = \dfrac{p}{p^4 - 1}$.

Р е ш е н и е. Запишем $\bar{f}(p)$ в виде

$$\bar{f}(p) = \frac{p}{p^2 - 1}\,\frac{1}{p^2 + 1}.$$

В силу того, что $\dfrac{p}{p^2 - 1} \doteqdot \operatorname{ch} t$ (формула 8 таблицы 3.2 при $\lambda = 1$) и $\dfrac{1}{p^2 + 1} \doteqdot \sin t$ (формула 5 таблицы 3.1 при $\omega = 1$) по теореме о свертке (формула 14 таблицы 3.1), имеем:

$$\frac{p}{p^4 - 1} \doteqdot \int_0^t \operatorname{ch}(t - \tau)\sin\tau d\tau = \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2}.$$

3.14.8. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.42. Решить дифференциальное уравнение (с начальным условием):

$$\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = e^t, \\ y(0) = 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Переходим к изображениям:

$$p\bar{y}(p) - 2\bar{y}(p) = \frac{1}{p - 1} \quad \text{или} \quad \bar{y}(p) = \frac{1}{(p - 1)(p - 2)}.$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p - 1)(p - 2)} = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{p - 2} \Rightarrow 1 \equiv A(p - 2) + B(p - 1).$$

Полагая $p = 1$, получим $A = -1$; при $p = 2$ имеем $B = 1$. Следовательно,

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1},$$

откуда:

$$y(t) = e^{2t} - e^{t}.$$

3.43. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = \varphi(t), \\ y(0) = y_0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Переходя к изображениям, получим:

$$p\bar{y}(p) - y_0 + a\bar{y}(p) = \bar{\varphi}(p)$$

или

$$\bar{y}(p) = \frac{\bar{\varphi}(p) + y_0}{p + a},$$

откуда

$$\bar{y}(p) = \frac{y_0}{p+a} + \frac{\bar{\varphi}(p)}{p+a}.$$

Переходя к оригиналам, пользуясь таблицей 3.2 и теоремой о свертке, имеем:

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau.$$

3.44. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' - -3y = e^{3t}$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Переходим к изображениям:

$$p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) - 2(p\bar{y}(p) - y(0)) - 3\bar{y}(p) = \frac{1}{p-3}$$

или

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p-3)(p^2-2p-3)} = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1}.$$

Действуя, как и выше, получаем, что

$$A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{16},\quad C=\frac{1}{16}.$$

Следовательно,

$$\overline{y}(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{(p-3)^2}-\frac{1}{16}\frac{1}{p-3}+\frac{1}{16}\frac{1}{p+1},$$

откуда, переходя к оригиналам, получим:

$$y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}.$$

3.45. Решить интегральное уравнение:

а) $y(t)=\int\limits_0^t y(\tau)d\tau+1$; б) $\int\limits_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau=1-\cos t$.

Р е ш е н и е.

а) Строим изображающее уравнение:

$$\overline{y}(p)=\frac{\overline{y}(p)}{p}+\frac{1}{p}\Rightarrow\overline{y}(p)(p-1)=1\Rightarrow\overline{y}(p)=\frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, оригинал имеет вид $y(t)=e^t$.

б) Левая часть уравнения является сверткой функции $y(t)$ и $\sin t$. Переходя к изображениям, получаем:

$$\overline{y}(p)\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}\Rightarrow\overline{y}(p)=\frac{1}{p}.$$

Следовательно, $y(t)=1$.

3.46. Решить систему дифференциальных уравнений:

а)
$$\begin{cases}\dfrac{dy_1(t)}{dt}+y_1(t)-y_2(t)=e^t,\\ \dfrac{dy_2(t)}{dt}+3y_1(t)-2y_2(t)=2e^t,\\ y_1(0)=1,\quad y_2(0)=1,\quad t>0.\end{cases}$$

б)
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1;\end{cases}\quad\text{если}\quad\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=5.\end{cases}$$

Р е ш е н и е.

а) Переходя к изображениям, имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} p\overline{y_1}(p)-1+\overline{y_1}(p)-\overline{y_2}(p)=\dfrac{1}{p-1}, \\ p\overline{y_2}(p)-1+3\overline{y_1}(p)-2\overline{y_2}(p)=\dfrac{2}{p-1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+1)\overline{y_1}(p)-\overline{y_2}(p)=\dfrac{p}{p-1}, \\ 3\overline{y_1}(p)+(p-2)\overline{y_2}(p)=\dfrac{p+1}{p-1}, \end{cases}$$

откуда

$$\overline{y_1}(p)=\overline{y_2}(p)=\frac{1}{p-1}\Rightarrow y_1(t)=y_2(t)=e^t.$$

б) Переходя к изображениям, имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} p\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p), \\ p\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+\dfrac{1}{p} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1-p)\bar{x}(p)+2\bar{y}(p)=0, \\ 2\bar{x}(p)+(1-p)\bar{y}(p)=-\dfrac{5p+1}{p}. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно $\bar{x}(p)$ и $\bar{y}(p)$, получаем:

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\quad \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Для определения оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ воспользуемся теоремой разложения — формулой 15 таблицы 3.1:

$\overline{f_1}(p)=10p+2,\ \overline{f_2}(p)=p^3-2p^2-3p,\ \overline{f_2}'(p)=3p^2-4p-3;$

$p_1=0,\ p_2=-1,\ p_3=3;$

$$\frac{\overline{f_1}(p_1)}{\overline{f_2}'(p_1)}=-\frac{2}{3},\ \frac{\overline{f_1}(p_2)}{\overline{f_2}'(p_2)}=-2,\ \frac{\overline{f_1}(p_3)}{\overline{f_2}'(p_3)}=\frac{8}{3}.$$

Таким образом, $x(t)=-\dfrac{2}{3}-2e^{-t}+\dfrac{8}{3}e^{3t}$. Аналогично находим, что $y(t)=\dfrac{1}{3}+2e^{-t}+\dfrac{8}{3}e^{3t}$.

3.14.9. СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 3.1

Основные правила операционного исчисления

№	$f(t)$	$\bar{f}(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$	Примечание
1	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\bar{f}(p)dp$	$\bar{f}(p)$	Формула обращения
2	$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} c_i \bar{f}_i(p),\quad c_i=\text{const}$	Свойство линейности
3	$f'(t)$	$p\bar{f}(p)-f(0)$	Изображение производной
4	$f^{(n)}(t),\quad n\geqslant 2$	$p^n\bar{f}(p)-\sum_{k=1}^{n} p^{n-k}f^{(n-k)}(0)$	
5	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}\bar{f}(p)$	Изображение интеграла
6	$-tf(t)$	$\bar{f}'(p)$	Дифференцирование изображения
7	$(-1)^n t^n f(t),\quad n\geqslant 0$	$\bar{f}^{(n)}(p)$	
8	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty}\bar{f}(q)dq$	Интегрирование изображения
9	$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{p}\int_p^{+\infty}\bar{f}(q)dq$	Интегрирование оригинала
10	$\int_t^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{p}\int_0^{p}\bar{f}(q)dq$	
11	$e^{kt}f(t)$	$\bar{f}(p-k)$	Теорема смещения
12	$\begin{cases}0, & t<\tau;\\ f(t-\tau), & t\geqslant\tau\end{cases}$	$e^{-p\tau}\bar{f}(p)$	Теорема запаздывания
13	$f(\lambda t),\quad \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}\bar{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$	Теорема подобия
14	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$\bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p)$	Теорема умножения изображений
15	$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\bar{f}_1(p_k)}{\bar{f}_2'(p_k)}e^{p_k t}$	$\frac{\bar{f}_1(p)}{\bar{f}_2(p)}=\frac{\bar{f}_1(p)}{\prod_{k=1}^{+\infty}a_k(p-p_k)}$	Теорема разложения

Таблица 3.2

Изображения по Лапласу некоторых функций

№	$f(t)$	$\bar{f}(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$
2	t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\nu > -1$, $\operatorname{Re} p > 0$
3	t^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
7	$\operatorname{sh} \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$
8	$\operatorname{ch} \lambda t$	$\frac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$
9	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$
10	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
11	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
12	$e^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda + \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
13	$e^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda + \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
14	$e^{-\alpha^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(\frac{p^2}{4\alpha^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)$
15	$\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$
16	$\operatorname{erfc}\sqrt{\alpha t}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{p\sqrt{p+\alpha}}$

Продолжение табл. 3.2

№	$f(t)$	$\bar{f}(p)$
17	$\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{p}\exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right)$
18	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right)$	$\exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right)$
19	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right)$

Примечания:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^x dt. \quad \operatorname{Re} x > -1 \text{ — гамма-функция.}$$

$$\operatorname{erfc} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt \equiv 1-\operatorname{erf} x. \quad \operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2}dt.$$

3.15. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.47. Найти модуль и аргумент комплексного числа и представить его в тригонометрической и показательной формах:

а) $z=\sqrt{3}+i$; б) $z=2+2i$;

в) $z=1-i$; г) $z=-1-i$;

д) $z=-\sqrt{3}+i$; е) $z=-i-\sqrt{3}$;

ж) $z=1+i\sqrt{3}$.

3.48. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{(z_1 \pm z_2)}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; г) $\overline{(\overline{z_1}\pm\overline{z_2})}=z_1\pm z_2$.

3.49. Вычислить:

а) $\frac{1}{i^5}$; б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^4$; в) $\frac{1+i}{1-i}$; г) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{80}$;

д) i^{137}; е) $\frac{1}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^7}$; ж) $(1+i)^2\left(-\sqrt{3}-i\right)^3$.

3.50. Записать в тригонометрической и показательной формах числа:

а) 3; б) -5; в) $4i$; г) $\sqrt{3}+i\sqrt{3}$;

д) $1-\sin\beta+i\cos\beta$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; е) $-i$; ж) i;

з) $\dfrac{1+\cos\gamma+i\sin\gamma}{1+\cos\gamma-i\sin\gamma}$; и) $2(\sin\alpha+i\cos\alpha)$.

3.51. Пользуясь формулой Муавра–Лапласа, выразить функции $\sin(4\gamma)$ и $\cos(4\gamma)$ через $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$.

3.52. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

а) $\sqrt[5]{i}$; б) $\sqrt[3]{1}$; в) $\sqrt{4+3i}$; г) $\sqrt[4]{-2}$; д) $\sqrt[3]{-i}$;

е) $\sqrt{\sqrt{3}+i}$; ж) $\sqrt[5]{-1}$.

3.53. Где расположены точки z, для которых:

а) $|z-3i|\geqslant 2$; б) $|z-3|-|z+3|>5$; в) $\operatorname{Re} z>-2$;

г) $\operatorname{Im} z\leqslant 1$; д) $\left|\dfrac{z-1}{z+2}\right|\geqslant 1$; е) $|z-2i|+|z+2i|=4$;

ж) $\dfrac{\pi}{3}<\arg(z-2i)<\dfrac{\pi}{2}$.

3.54. Доказать, что если $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_2|=1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в круг радиуса 2 с центром в начале координат.

3.55. Найти угол поворота θ и коэффициент растяжения k в точке z_0 при отображении с помощью функции $w=z^4$:

а) $z_0=1$; б) $z_0=1-i$; в) $z_0=i$; г) $z_0=1+\sqrt{3}i$.

3.56. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при отображении с помощью функций:

а) $w=z^2$; б) $w=z^2-2z$; в) $w=-\dfrac{1}{z}$.

3.57. Проверить выполнение условий Коши–Римана для следующих функций:

а) $w=\cos(3z)$; б) $w=\sin^2(5z)$; в) $w=\exp(z^2+3z)$;

г) $w=\operatorname{Ln}(z+i)$; д) $w=z\cdot\bar{z}$; е) $w=\exp(2\bar{z})$;

ж) $w = \sin(3\bar{z})$; з) $w = \operatorname{Ln}(\bar{z} - 1)$.

3.58. Дифференцируемы ли функции:

а) $f(z) = x^2 - y^2 + 2y - 1 + 2i(x - xy)$;

б) $f(z) = e^x(\cos(y + 1) + i\sin(y + 1))$;

в) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

3.59. Существует ли аналитическая функция $f(z) = u + iv$, для которой $u = \dfrac{y}{x}$?

3.60. Убедиться в том, что существует аналитическая функция $f(z) = u + iv$, мнимая часть которой равна

$$v = 2x + y - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

3.61. Дана мнимая часть $v = 2x + 2xy$ аналитической функции $f(z) = u + iv$. Найти эту функцию при условии $f(i) = -3$.

3.62. Дана действительная часть $u = 5^x\cos(y \ln 5)$ аналитической функции $f(z) = u + iv$. Найти эту функцию.

3.63. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^3 - y^3 i)dz$, где L — отрезок прямой, соединяющей точки $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$.

3.64. Вычислить интеграл $\int\limits_L \dfrac{dz}{z - 3}$, где L — эллипс $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

3.65. Вычислить интеграл $\int\limits_L (1 - i + 3\bar{z})dz$, где L — линия, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$:

а) по прямой;

б) по параболе $y = x^3$;

в) по ломанной $z_1z_2z_3$, где $z_3 = 1$.

3.66. Вычислить интеграл $\int\limits_L (z^2 + 2z\bar{z})dz$, где L — дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

3.67. Вычислить интеграл $\int\limits_L e^{-3\bar{z}}dz$, где L — отрезок прямой $y = x$, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi + i\pi$.

3.68. Вычислить интеграл $\int\limits_{1+i}^{2+3i}(z^2+z+1)dz$.

3.69. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{i}z^2\sin z dz$.

3.70. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{1+i}\frac{\ln^4 z}{z}dz$.

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы.

3.71. а) $\int\limits_L\frac{\cos z}{z+i}dz$; б) $\int\limits_L\frac{\cos z}{(z+i)^2}dz$;

в) $\int\limits_L\frac{e^z}{(z+i)^4}dz$; г) $\int\limits_L\frac{z^4}{z+i}dz$,

где L — окружность с центром в точке $z=-i$ и радиуса 2.

3.72. $\int\limits_L\frac{z^3}{(z-3i)^2}dz$, где L — окружность

а) радиуса 4 с центром в начале координат;

б) радиуса 2 с центром в начале координат.

3.73. $\int\limits_L\frac{z^4}{(z^2+25)^3}dz$, где L — окружность радиуса 4 с центром в точке $-3i$.

3.74. $\int\limits_L\frac{e^{3z}}{(z^2+9)^4}dz$, где L — окружность $|z-i|=3$.

3.75. $\int\limits_L\frac{e^{3z}}{\left(z^2+9\right)^4}dz$, где L — окружность $|z-i|=5$.

Ряды Тейлора и Лорана.

3.76. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(z-i)$ функцию $f(z)=\frac{3}{z}$.

3.77. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$ функцию $f(z)=z^4$.

3.78. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням $(z-i)$ функции $f(z)=tg(z-i)$.

3.79. Разложить в ряд Тейлора следующие функции, используя известные разложения, и найти радиус сходимости полученных рядов:

а) $\sin(3z+4)$ по степеням $(z+i)$;

б) e^{3z} по степеням $2z+1$;

в) $\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ по степеням z;

г) $\ln(2-z)$ по степеням z;

д) z^4 по степеням $z-2i$.

3.80. Определить область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n \operatorname{sh}\dfrac{i}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+1}{(z-2i)^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{(i+1)^n n^n}$; г) $\ldots+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+\dfrac{z}{3}+\dfrac{z^2}{9}+\dfrac{z^3}{27}+\ldots$;

д) $\ldots+\dfrac{3}{z^3}+\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+4z+16z^2+64z^3+\ldots$;

е) $\ldots+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{1}{3}i\right)^3}{z^3}+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{1}{3}i\right)^2}{z^2}+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{1}{3}i\right)}{z}+1+iz+i^2z^2+i^3z^3+\ldots$.

3.81. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{2}{z^2-4z+3}:$$

а) по степеням z в кольце $1<|z|<3$;

б) по степеням z в кольце $1<|z|<2$;

в) по степеням $(z-1)$ в кольце $2<|z-1|<\infty$;

г) по степеням $(z-1)$ в кольце $0<|z-1|<2$.

3.82. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{z^3}{z+1}$ в окрестности точки:

а) $z=0$;

б) $z=\infty$.

3.83. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z)=\frac{1-\cos(2z)}{z^2}$$

при $z\neq 0$ и $f(z)=2$ при $z=0$.

3.84. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=3^{2z}+3^{\frac{1}{2z}}-4,$$

определенную во всей плоскости, кроме точки $z=0$.

3.85. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}(3z)-3z}{z^5},$$

при $z\neq 0$ и $f(z)=\infty$ при $z=0$.

3.86. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{3}{4z+7}$ в окрестности точки $z=\infty$.

С помощью вычетов вычислить следующие интегралы.

3.87. $\displaystyle\int_L \frac{z^3dz}{(z^2+4)(z-3)}$, где L — окружность $|z|=4$.

3.88. $\displaystyle\int_L \frac{z^2+1}{z(z+2)(z+3)}dz$, где L — окружность:

а) $|z-1|=2$; б) $|z-1|=4$; в) $|z-1|=5$.

3.89. $\displaystyle\int_L \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+9)}$, где L — окружность $|z|=4$.

3.90. $\displaystyle\int_L \frac{z}{z+1}e^{\frac{1}{2z}}dz$, где L — окружность $|z|=2$.

3.91. $\displaystyle\int_L e^{\frac{2}{z-1}}\frac{dz}{z}$, где L — окружность $|z|=3$.

3.92. $\displaystyle\int_L \sin\frac{2}{z-3}dz$, где L — окружность $|z-3|=1$.

3.93. $\displaystyle\int_L \frac{z^2}{e^{z^2}-1}dz$, где L — окружность $|z|=3$.

3.94. Найти изображения следующих функций:

а) $f(t)=\sin^2 t$; б) $f(t)=e^t\cos^2 t$; в) $f(t)=\operatorname{ch} at$;

г) $f(t)=\operatorname{sh} at\cos bt$; д) $f(t)=\operatorname{ch} at\sin bt$;

е) $f(t)=\operatorname{ch} at\cos bt$; ж) $f(t)=t\operatorname{sh} at$.

3.95. Найти изображения:

а) $F(t)=y(t)-2y'(t)$, если $y(0)=0$, $y(t)\doteqdot\bar{y}(p)$;

б) $F(t)=y'''(t)-y''(t)+2y'(t)-2y(t)$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$, $y(t)\doteqdot\bar{y}(p)$;

в) $F(x,t)=\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$, если $T(x,t)\dot{\div}\bar{T}(x,p)$;

г) $F(t)=y'(t)-\int\limits_0^t y(\tau)d\tau$, если $y(0)=0$, $y(t)\dot{\div}\bar{y}(p)$.

3.96. Найти оригиналы по данным изображениям:

а) $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$; б) $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$;

в) $\bar{f}(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$; г) $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$.

3.97. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $\bar{f}(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

3.98. Найти свертку функции t и $\cos t$ и ее изображение.

3.99. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'-2y=0$, $y(0)=1$;

б) $y'+y=e^t$, $y(0)=0$;

в) $y''-9y=0$, $y(0)=y'(0)=0$;

г) $y''+y'-2y=e^t$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$;

д) $y'''-6y''+11y'-6y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$.

3.100. Решить системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x;\end{cases}$ если $\begin{cases}x(0)=2,\\ y(0)=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-3y;\end{cases}$ если $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=1.\end{cases}$

3.101. Решить интегральные уравнения:

а) $\int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)^2 d\tau=\dfrac{1}{3}t^3$; б) $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau=1-\cos t$.

ГЛАВА 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

связывающее аргумент x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные до n-го порядка $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка**. В дальнейшем условимся в ряде случаев вместо слов «обыкновенное дифференциальное уравнение» сокращенно писать ОДУ.

Если возможно представить уравнение (4.1) в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{4.2}$$

то это уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной. Итак, **порядком ОДУ** называется порядок входящей в него старшей производной.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения (4.1) в некоторой области $x \in D$ называется функция, которая n раз дифференцируема в этой области и, будучи подставлена в уравнение (4.1), обращает его в тождество.

Процесс нахождения общего решения называется **интегрированием дифференциального уравнения**. В общем случае для отыскания решения уравнения (4.1) потребуется последовательно произвести нахождение n неопределенных интегралов, поэтому решение в явной форме $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ (или в неявной форме $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$) будет содержать столько независимых произвольных постоянных C_1,

$C_2, \ldots, C_n$, каков порядок уравнения. Соотношения $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ ($\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$) называются **общим решением (интегралом)** дифференциального уравнения (4.1).

Функции $y(x, \text{const}_1, \text{const}_2, \ldots, \text{const}_n)$, получаемые из общего решения при конкретном наборе числовых значений произвольных постоянных $C_1 = \text{const}_1$, $C_2 = \text{const}_2$, ..., $C_n = \text{const}_n$, называется **частным решением** дифференциального уравнения (4.1).

График функции для частного решения $y(x, \text{const}_1)$ ОДУ первого порядка $F(x, y, y') = 0$ называется **интегральной кривой**. Общему решению $y(x, C_1)$ дифференциального уравнения первого порядка соответствует **семейство интегральных кривых**.

Задачей Коши называют задачу нахождения частного решения $y(x, \text{const}_1, \text{const}_2, \ldots, \text{const}_n)$ уравнения (4.2), удовлетворяющего в некоторой точке $x = x_0$ системе n условий:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 = \text{const}_1, \\ y'(x_0) = y_0' = \text{const}_2, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = \text{const}_n, \end{cases} \tag{4.3}$$

которые называются **начальными условиями**.

Теорема 4.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть дано уравнение (4.2) и система начальных условий (4.3). Если функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по всем своим переменным в окрестности начальных условий:

$$x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0, y_0 - h_1 < y < y_0 + h_1,$$
$$y_0' - h_2 < y' < y_0' + h_1, \ldots, y_0^{(n-1)} - h_n < y^{(n-1)} < y_0^{(n-1)} + h_n,$$

и имеет непрерывные частные производные по аргументам $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, то существует, и притом единственное, решение задачи Коши, определенное и непрерывное в некотором интервале, содержащем точку $x = x_0$.

Справедливы теоремы о существовании и единственности решений ОДУ с более слабыми ограничениями. Поясним это на примере ОДУ первого порядка.

Теорема 4.2 (достаточное условие единственности и существования решения задачи Коши). Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$, где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости XOY, содержащей точку (x_0, y_0). Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x, y)$ непрерывная функция своих переменных x и y в области D;

2) частная производная $f'_y(x, y)$ ограничена в области D, то существует интервал $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, на котором существует единственное решение задачи Коши.

Требование ограниченности частной производной $f'_y(x, y)$ может быть ослаблено посредством замены его на **условие Липшица**: функция $f(x, y)$ удовлетворяет в некоторой области D условию Липшица, если существует некоторая константа λ **(постоянная Липшица)**, что для любых y_1, y_2, принадлежащих D, и для любого $x \in D$ выполняется неравенство: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \lambda|y_1 - y_2|$.

Из условия ограниченности в области D производной $f'_y(x, y)$ следует условие Липшица, но из условия Липшица не всегда получается ограниченность $f'_y(x, y)$, последняя может даже не существовать.

4.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

4.2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Существует класс ОДУ первого порядка $\alpha(x)N(y)dx = \beta(x)M(y)dy$ (или $\frac{dy}{dx} = \gamma(x)\eta(y)$), приводящихся к виду:

$$\frac{\alpha(x)\cdot dx}{\beta(x)} = \frac{M(y)\cdot dy}{N(y)} \quad \left(\frac{dy}{\eta(y)} = \frac{dx}{\gamma(x)}\right).$$

Заметим, что при разделении переменных дифференциалы должны быть в числителях или в множителях, тогда возможно интегрирование обеих частей по своим переменным

с написанием произвольной постоянной в одной из частей уравнения. Общее решение имеет вид:

$$\int\frac{\alpha(x)\cdot dx}{\beta(x)}-\int\frac{M(y)\cdot dy}{N(y)}=C.$$

Кроме того, нужно учитывать, что при разделении переменных возможна потеря частных решений, которые обращают в ноль произведения $\beta(x)N(y)$. Первоначальную запись уравнения в форме производной со штрихом $y'=f(x,y)$ лучше привести к виду $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Уравнение вида $\frac{dy}{dx}=g(ax+by+c)$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными путем замены $t=ax+by+c$. Действительно, $\frac{dt}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, отсюда $\frac{dt}{dx}=a+bg(t)$, переменные разделяются: $\frac{dt}{a+bg(t)}=dx$.

4.2.1.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.1. Найдите общее решение ОДУ $y'=\frac{y^2}{x}$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}$. Соберем в левой части все, зависящее от y, а все от x — в правой части: $\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x}$. Интегрируем обе части, каждую по своей переменной: $\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{dx}{x}$; удобно для дальнейшего получения решения в явной форме представить произвольную константу интегрирования в виде $\ln C$: $-\frac{1}{y}=\ln x+\ln C$ — получили общее решение ОДУ в неявной форме. В явном виде решение имеет вид $y=-\frac{1}{\ln(Cx)}$.

4.2. Решить задачу Коши с дифференциальным уравнением $3y' = 4\dfrac{x^3}{y^2}$ и начальным условием $y(1) = 2$, т. е. при $x = 1, y = 2$.

Р е ш е н и е. *1-й шаг.* Найдем общее решение, для этого перепишем уравнение в виде: $3\dfrac{dy}{dx} = 4\dfrac{x^3}{y^2}$; разделим переменные $3y^2dy = 4x^3dx$. Интегрируем обе части по своим переменным $\int 3y^2dy = \int 4x^3dx$, $3\dfrac{y^3}{3} = 4\dfrac{x^4}{4} + C$, $y^3 = x^4 + C$. Получили общее решение в неявной форме. Найдем общее решение в явной форме: $y = \sqrt[3]{x^4 + C}$.

2-й шаг. Воспользуемся начальным условием, найдем конкретное числовое значение произвольной константы C и запишем частное решение задачи Коши:

$$2 = \sqrt[3]{1^4 + C},\quad 2^3 = 1 + C,\quad C = 7,\quad y = \sqrt[3]{x^4 + 7}.$$

4.3. Решить задачу Коши: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+y)^2}$, $y(0) = 1$.

Р е ш е н и е. *1-й шаг.* Введем новую неизвестную функцию замены $t = x + y$, тогда $\dfrac{dt}{dx} = 1 + \dfrac{1}{t^2}$.

2-й шаг. Разделим переменные: $\dfrac{t^2dt}{1+t^2} = dx$, интегрируем обе части, каждую по своей переменной:

$$\int\frac{t^2dt}{1+t^2} = \int dx,\quad \int\frac{(t^2+1-1)dt}{1+t^2} = x + C,\quad \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = x + C,$$

$t - \operatorname{arctg} t = x + C$, $(x + y) - \operatorname{arctg}(x + y) = x + C$. Получили общее решение в неявной форме.

3-й шаг. Найдем частное решение, воспользовавшись начальным условием: $(0 + 1) - \operatorname{arctg}(0 + 1) = 0 + C$, $C = 1 - \dfrac{\pi}{4}$. Решение задачи Коши также запишем в неявной форме: $(x + y) - \operatorname{arctg}(x + y) = x + 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

4.2.1.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать уравнения.

4.4. $(x+3)dy+(y-2)dx=0,\ y(1)=5.$

4.5. $y'=(1-2y)\operatorname{tg}x,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)=4.$

4.6. $y(1+x^2)dy-(1+y^2)dx=0,\ y(0)=0.$

4.7. $y\ln y dx+x\ln x dy=0,\ y(e)=e.$

4.8. $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'=y,\ y(0)=1.$

4.9. $(x+xy^2)dx+(y+yx^2)dy=0,\ y(0)=0.$

4.10. $ye^{2x}dx+(1+e^{2x})dy=0,\ y(0)=1.$

4.11. $\sin x\cos y dx=\cos x\sin y dy,\ y(0)=0.$

4.12. $yy'+x-1=0,\ y(0)=\ln 1.$

4.13. $y'(1+x^2)=2x\sqrt{1-y^2}.$

4.14. $y'x=xy-y,\ y(1)=-1.$

4.15. $y'xy=1-x^2,\ y(1)=0.$

4.16. $y'=(8x+2y+1)^2.$

4.17. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0,\ y(1)=2.$

4.2.2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Функция $f(x, y)$ называется **однородной измерения** m, если при любом $t\neq 0$ выполняется равенство $f(tx, ty)=t^m f(x, y)$. Например, такими функциями нулевого измерения являются

$$f(x,y)=\frac{y}{x}\quad\left(f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}=t^0\frac{y}{x}=f(x,y)\right);$$

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\quad\left(f(tx,ty)=\frac{(ty)^2-(tx)^2}{(tx)^2+(ty)^2}=t^0\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=f(x,y)\right).$$

ОДУ первого порядка с однородной функцией нулевого измерения в правой части называется **однородным:**

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение может иметь вид $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(tx, ty) = tP(x, y)$, $Q(tx, ty) = tQ(x, y)$ — однородные функции первого измерения.

Решение однородного уравнения сводится к решению уравнения с разделяющимися переменными. Схема сведения такова.

1-й шаг. Введем новую неизвестную функцию

$$u(x) = \frac{y(x)}{x},$$

отсюда $y(x) = x \cdot u(x)$.

2-й шаг. Выразим производную $\frac{dy}{dx}$ через производную $\frac{du}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = u(x) + x\frac{du}{dx}$ и подставим в исходное уравнение $u + x\frac{du}{dx} = f(u)$.

3-й шаг. Разделяем переменные: $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

4-й шаг. Интегрируем обе части, каждую по своей переменной:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

5-й шаг. Осуществляем переход к исходной искомой функции с помощью соотношения $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

К однородным уравнениям в ряде случаев сводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + c_1}{a_{21}x + a_{22}y + c_2}\right).$$

1-й случай. $c_1 = c_2 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{22}y}\right) = f\left(\frac{x(a_{11} + a_{12}(y/x))}{x(a_{21} + a_{22}(y/x))}\right) = f\left(\frac{a_{11} + a_{12}(y/x)}{a_{21} + a_{22}(y/x)}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

— однородное уравнение, рассмотренное выше.

Если хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 не равно нулю, возможны следующие два случая.

2-й случай. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Введем новые аргумент $\alpha = x - h$ и функцию $\beta = y - k$, где h и k находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}h + a_{12}k + c_1 = 0, \\ a_{21}h + a_{22}k + c_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение в новых переменных с учетом того, что $dy = d\beta$, $dx = d\alpha$ и $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\beta}{d\alpha}$, принимает вид однородного уравнения

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{11}h + a_{12}k + c_1}{a_{21}\alpha + a_{22}\beta y + a_{21}\alpha + a_{22}\beta + c_2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta)}{a_{21}\alpha + a_{22}\beta}\right) = f\left(\frac{a_{11} + a_{12}\beta/\alpha)}{a_{21} + a_{22}\beta/\alpha}\right) = F\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

3-й случай. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, тогда строки пропорциональны $\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{a_{22}}{a_{12}} = n$ и уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + c_1}{n(a_{11}x + a_{12}y) + c_2}\right).$$

Полученное уравнение заменой $z = a_{11}x + a_{12}y$ приводится к уравнению

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{dz}{dx} - \frac{a_{11}}{a_{12}} = f\left(\frac{z + c_1}{nz + c_2}\right)$$

с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{a_{11} + a_{12}f\left(\dfrac{z + c_1}{nz + c_2}\right)} = dx.$$

Уравнения вида

$$F\left(x,\ y^{\beta},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\beta - 1}\right) = 0$$

с помощью замены переменной $y = w^{\beta}$ сводятся к однородным уравнениям.

4.2.2.1.
ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.18. Решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(1 - \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$, $y(1) = e$.

Р е ш е н и е.

$$u(x) = \frac{y(x)}{x};$$

$$y(x) = xu(x);$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx};$$

$$u + x\frac{du}{dx} = u\left(1 - \ln\left(\frac{1}{u}\right)\right);$$

$$x\frac{du}{dx} = u\ln u;$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{d(\ln u)}{\ln u} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C, \quad |\ln u| = \ln C|x|;$$

$$u = e^{cx};$$

$y = xe^{cx}$ — общее решение. Частное решение с учетом начального условия: $y = xe^x$.

4.19. Получить общее решение уравнения $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$.

Р е ш е н и е. Функции $P(x, y) = x + y$ и $Q(x, y) = x - y$ есть однородные функции первого измерения: $P(tx, ty) = tx + ty = t(x + y) = tP(x, y)$, $Q(tx, ty) = tx - ty = t(x - y) = tQ(x, y)$. Введем новую функцию $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, отсюда $y(x) = xu(x)$, $dy = udx + xdu$. Подставим замены в исходное уравнение $(x + xu)dx + (x - xu)(udx + xdu) = 0$. Собираем коэффициенты перед дифференциалами: $(1 + 2u - u^2)dx + x(1 - u)du = 0$. Разделяем переменные: $\frac{(u-1)du}{1+2u-u^2} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части, замечая, что $d(1+2u-u^2) = (2-2u)du = -2(u-1)du$ и $(u-1)du = -\frac{1}{2}d(1+2u-u^2)$, имеем

$$\int\frac{-0{,}5d(1+2u-u^2)}{1+2u-u^2} = \int\frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2| + \ln C = \ln|x|,$$

отсюда $x\sqrt{1+2u-u^2} = C$, возвращаясь к $y(x) = xu(x)$, получим $x^2 + 2xy - y^2 = C^2 (C \neq 0)$.

4.20. Получить общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{4x-y-7}.$$

Р е ш е н и е. Составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$.

Имеем 2-й случай. Введем новые аргумент $\alpha = x - h$ и функцию $\beta = y - k$, где h и k находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} h + 3k - 5 = 0, \\ 4h - k - 7 = 0. \end{cases}$$

Система имеет решение $h = 2$, $k = 1$. Замена имеет вид $\alpha = x - 2$, $\beta = y - 1$. Получаем однородное уравнение

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\alpha + 3\beta}{4\alpha - \beta}, \text{ или } \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1 + 3\beta/\alpha}{4 - \beta/\alpha}.$$

Вводим новую функцию $u(\alpha) = \frac{\beta(\alpha)}{\alpha}$, $\frac{d\beta}{d\alpha} = u + \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}$. Уравнение принимает вид $u + \alpha\frac{du}{d\alpha} = \frac{1+3u}{4-u}$. Разделяем переменные: $\frac{(4-u)du}{u^2-u+1} = \frac{d\alpha}{\alpha}$. Интегрируем:

$$\int\frac{(4-u)du}{u^2-u+1} = \int\frac{d\alpha}{\alpha}, \quad \int\frac{(4-u)du}{(u-0{,}5)^2+0{,}75} = \ln|\alpha| + \ln C.$$

Используем подстановку Эйлера:

$$u - 0{,}5 = \sqrt{0{,}75}z, \quad u = \sqrt{0{,}75}z + 0{,}5, \quad du = \sqrt{0{,}75}dz:$$

$$\int\frac{(4-\sqrt{0,75}z+0,5)\sqrt{0,75}dz}{0,75z^2+0,75}=\ln|\alpha|+\ln C,$$

$$\frac{4,5\sqrt{0,75}}{0,75}\int\frac{dz}{z^2+1}+\int\frac{zdz}{z^2+1}=\ln(C|\alpha|).$$

$$\frac{4,5\sqrt{0,75}}{0,75}\operatorname{arctg}z+0,5\ln|z^2+1|=\ln(C|\alpha|).$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\frac{4,5\sqrt{0,75}}{0,75}\operatorname{arctg}\frac{u-0,5}{\sqrt{0,75}}+0,5\ln\left|\frac{(u-0,5)^2}{0,75}+1\right|=\ln(C|\alpha|),$$

$$\frac{4,5\sqrt{0,75}}{0,75}\operatorname{arctg}\frac{(\beta/\alpha-0,5)}{\sqrt{0,75}}+0,5\ln\left|\frac{(\beta/\alpha-0,5)^2}{0,75}+1\right|=\ln(C|\alpha|),$$

$$\frac{4,5\sqrt{0,75}}{0,75}\operatorname{arctg}\frac{((y-1)/(x-2))-0,5}{\sqrt{0,75}}+$$

$$+0,5\ln\left|\frac{((y-1)\beta/(x-2)-)0,5)^2}{0,75}+1\right|=\ln(C|x-2|).$$

4.21. Получить общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{4x+4y-1}.$$

Р е ш е н и е. Составим определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 4\end{vmatrix}=0$. Имеем 3-й случай. Введем замену $z=x+y$, $4x+4y=4z$, $dy=dz-dx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$. Уравнение принимает вид $\frac{dz}{dx}-1=\frac{z+1}{4z-1}$.

Разделяем переменные: $\frac{(4z-1)dz}{5z}=dx$. Интегрируем:

$$\frac{4}{5}\int dz-\frac{1}{5}\int\frac{dz}{z}=x+C,\quad \frac{4}{5}z-\frac{1}{5}\ln|z|=x+C.$$

Возвращаемся к прежним переменным:

$$\frac{4}{5}(x+y)-\frac{1}{5}\ln|x+y|=x+C.$$

4.22. Получить общее решение уравнения $xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$.

Р е ш е н и е. Произведем подстановку $y = w^\beta$, где параметр β определится из условия равенств сумм степеней каждого из одночленов, стоящих в скобках перед dx и dw: $xw^{3\beta}dx + (x^2w^{3\beta-1} - w^{\beta-1})\beta dw = 0$. Приравниваем суммы степеней одночленов: $1 + 3\beta = 2 + 3\beta - 1 = \beta - 1$, отсюда

$$\beta = -1, \quad y = \frac{1}{z},$$

исходное уравнение принимает вид однородного: $wxdx + (w^2 - x^2)dw = 0$. Делаем замену:

$$u(x) = \frac{w(x)}{x};$$
$$w(x) = xu(x); \; dw = udx + xdu;$$
$$ux^2dx + (u^2x^2 - x^2)(udx + xdu) = 0;$$
$$(ux^2 + u^3x^2 - ux^2)dx + (x^3u^2 - x^3)du = 0,$$

или $u^3dx + x(u^2 - 1)du = 0$. Разделяем переменные:

$$\frac{(u^2-1)du}{u^3} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{du}{u} - \int u^{-3}du = -\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|u| + \frac{1}{2u^2} = -\ln|x| + \ln C,$$

возвращаемся к функции w: $\ln\left|\frac{w}{x}\right| + \frac{1}{2(w/x)^2} = \ln\frac{C}{|x|}$. Возвращаемся к функции $y(x) = \frac{1}{w(x)}$: $\ln\left|\frac{1}{yx}\right| + \frac{y^2x^2}{2} = \ln\frac{C}{|x|}$.

Заметим, что помимо этого решения исходное уравнение имеет частное решение $y = 0$.

4.2.2.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать следующие уравнения.

4.23. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$.

4.24. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

4.25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{2x-2y+5}$. **4.26.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

4.27. $xdy-ydx=ydy,\ y(-1)=1$.

4.28. $(y^2-3x^2)dy+2xy=0,\ y(1)=-2$.

4.29. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right),\ y(1)=\pi/2$.

4.30. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y},\ y(1)=1$.

4.31. $y^3dx+(2x^2-2xy^2)dy=0$.

4.32. $3(y^5-xy^2)dy+(x+y^3)dx=0$.

4.33. $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{x+y-1}{x+y+1}\right)^2$.

4.34. $2y^2dx-(4xy+x^2)dy=0, y(1)=1$.

4.35. $(y^4-2x^3y)dx+(x^4-2xy^3)dy=0, y(1)=1$.

4.36. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sqrt[x]{e^y},\ y(1)=0$.

4.37. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{\cos(y/x)},\ y(1)=\pi$.

4.2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕНУЛЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Линейным ОДУ первого порядка с ненулевой правой частью (неоднородным линейным ОДУ первого порядка) называется уравнение $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции в некотором интервале и тождественно не равные нулю на этом интервале. Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ называется **линейным ОДУ первого порядка с нулевой правой частью (однородным линейным ОДУ первого порядка)**. Оно интегрируется как уравнение с разделяющимися переменными. Существуют два метода решения неоднородного уравнения.

1-й метод — метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

1-й шаг. Решаем соответствующее однородное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \quad \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C; \quad y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

2-й шаг. Заменяем произвольную постоянную интегрирования C на подлежащую определению функцию $C(x)$:

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

3-й шаг. Подставляем новое выражение для $y(x)$ в исходное уравнение и получаем уравнение для $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

отсюда $\dfrac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$.

4-й шаг. Решаем полученное уравнение методом разделения переменных:

$$dC = q(x)e^{\int p(x)dx}dx; \quad \int dC = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx;$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

5-й шаг. Записываем окончательный ответ:

$$y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

2-й метод — метод Бернулли.

1-й шаг. Представим неизвестную функцию $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x)\cdot v(x)$, при этом $\dfrac{dy}{dx} = v(x)\dfrac{du}{dx} + u(x)\dfrac{dv}{dx}$.

2-й шаг. Подставим выражения для $y(x)$ и ее производной в исходное уравнение

$$v(x)\frac{du}{dx} + u(x)\frac{dv}{dx} + p(x)u(x)v(x) = q(x)$$

и вынесем за скобки $u(x)$ в двух последних слагаемых левой части:

$$v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\left[\frac{dv}{dx}+p(x)v(x)\right]=q(x).$$

3-й шаг. Приравняем выражение в квадратной скобке к нулю: $\frac{dv}{dx}+p(x)v(x)=0$, и решим полученное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dv}{v}=-p(x)dx;\quad \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx;$$

$$\ln|v(x)|=-\int p(x)dx;\quad v(x)=e^{-\int p(x)dx}.$$

Заметим, что при нахождении $v(x)$ произвольная константа интегрирования не пишется, неопределенный интеграл рассматривается в данном случае как одна из первообразных.

4-й шаг. Подставляем найденную функцию в уравнение, полученное на 2-м шаге, получаем уравнение для неизвестной функции $u(x)$: $e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}=q(x)$. Решаем его методом разделения переменных:

$$du=e^{\int p(x)dx}q(x)dx;\quad \int du=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx;$$

$$u(x)=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C.$$

Заметим, что на этом шаге произвольная константа интегрирования записывается, а под неопределенным интегралом подразумевается одна из первообразных.

5-й шаг. Выписываем ответ:

$$y(x)=u(x)v(x)=\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha\in R,\ \alpha\neq 0;1$. Использование подстановки $u(x)=(y(x))^{1-\alpha}$ приводит уравнение к линейному ОДУ первого порядка

с ненулевой правой частью $\frac{du}{dx}+(1-\alpha)p(x)u=(1-\alpha)q(x)$, которое решается изложенными выше методами. Можно также решать исходное уравнение непосредственно методом Бернулли.

1-й шаг. Представим неизвестную функцию $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, при этом

$$\frac{dy}{dx}=v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}.$$

2-й шаг. Подставим выражения для $y(x)$ и ее производной в исходное уравнение:

$$v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}+p(x)u(x)v(x)=q(x)(u(x)v(x))^{\alpha},$$

и вынесем за скобки $u(x)$ в двух последних слагаемых левой части:

$$v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\left[\frac{dv}{dx}+p(x)v(x)\right]=q(x)(u(x)v(x))^{\alpha}.$$

3-й шаг. Приравняем выражение в квадратной скобке к нулю $\frac{dv}{dx}+p(x)v(x)=0$ и решим полученное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dv}{v}=-p(x)dx;\quad \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx;$$

$$\ln|v(x)|=-\int p(x)dx;\quad v(x)=e^{-\int p(x)dx}.$$

Заметим, что при нахождении $v(x)$ произвольная константа интегрирования не пишется, неопределенный интеграл рассматривается в данном случае как одна из первообразных.

4-й шаг. Подставляем найденную функцию в уравнение, полученное на 2-м шаге, получаем уравнение для неизвестной функции $u(x)$:

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}=q(x)(u(x))^{\alpha}\left(e^{-\int p(x)dx}\right)^{\alpha}.$$

Решаем его методом разделения переменных:

$$du = \left(e^{-\int p(x)dx}\right)^{\alpha-1} q(x)dx;$$

$$\int du = \int \left(e^{-\int p(x)dx}\right)^{\alpha-1} q(x)dx;$$

$$u(x) = \int \left(e^{-\int p(x)dx}\right)^{\alpha-1} q(x)dx + C.$$

Заметим, что на этом шаге произвольная константа интегрирования записывается, а под неопределенным интегралом подразумевается одна из первообразных.

5-й шаг. Выписываем ответ:

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(\int \left(e^{-\int p(x)dx}\right)^{\alpha-1} q(x)dx + C\right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Уравнением Риккати называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2(x) = f(x).$$

В общем случае это уравнение не интегрируется, однако если известно какое-либо его частное решение $y = y_1(x)$, то введением новой неизвестной функции $z(x) = y(x) - y_1(x)$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли:

$$\frac{dz}{dx} + [p(x) + 2q(x)y_1(x)]z(x) + q(x)z^2(x) = 0.$$

Достаточно часто использование подстановки

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)}$$

приводит уравнение Риккати к линейному ОДУ первого порядка с ненулевой правой частью:

$$\frac{dz}{dx} - (2q(x)y_1(x) + p(x))z = q(x).$$

4.2.3.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.38. Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$ двумя методами: методом вариации произвольной постоянной и методом Бернулли.

Р е ш е н и е. 1-й м е т о д. Применим *метод вариации произвольной постоянной.*

1-й шаг. Решаем соответствующее однородное уравнение $\frac{dy}{dx}+xy=0$ методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{y}=-xdx;\quad \int\frac{dy}{y}=-\int xdx;\quad \ln|y|=-\ln|x|+\ln C;\quad y(x)=\frac{C}{x}.$$

2-й шаг. Заменяем произвольную постоянную интегрирования C на подлежащую определению функцию $C(x)$:

$$y(x)=\frac{C(x)}{x}.$$

3-й шаг. Подставляем новое выражение для $y(x)$ в исходное уравнение и получаем уравнение для $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x}-x\frac{C(x)}{x}e^{-\int p(x)dx}+x\frac{C(x)}{x}\cdot e^{-\int p(x)dx}=x^2,$$

отсюда $\frac{dC}{dx}=x^3$.

4-й шаг. Решаем полученное уравнение методом разделения переменных: $dC=x^3dx$;

$$\int dC=\int x^3dx;\quad C(x)=\frac{x^4}{4}+C_1.$$

5-й шаг. Записываем окончательный ответ:

$$y(x)=\left(\frac{x^4}{4}x+C_1\right)\frac{1}{x}=\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}.$$

2-й м е т о д. Применим *метод Бернулли.*

1-й шаг. Представим неизвестную функцию $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x),\ \text{при этом}\ \frac{dy}{dx}=v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}.$$

2-й шаг. Подставим выражения для $y(x)$ и ее производной в исходное уравнение:

$$v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}+xu(x)v(x)=x^2,$$

и вынесем за скобки $u(x)$ в двух последних слагаемых левой части: $v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\left[\frac{dv}{dx}+xv(x)\right]=x^2$.

3-й шаг. Приравняем выражение в квадратной скобке к нулю: $\frac{dv}{dx}+xv(x)=0$, и решим полученное уравнение методом разделения переменных: $v(x)=\frac{1}{x}$. Здесь произвольная константа интегрирования не пишется.

4-й шаг. Подставляем найденную функцию в уравнение, полученное на 2-м шаге, получаем уравнение для неизвестной функции $u(x)$: $\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}=x^2$. Решаем его методом разделения переменных: $du=x^3dx$; $u(x)=\frac{x^4}{4}+C$. Заметим, что на этом шаге произвольная константа интегрирования записывается.

5-й шаг. Выписываем ответ:

$$y(x)=\left(\frac{x^4}{4}+C\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^3}{4}+\frac{C}{x}.$$

4.39. Проинтегрировать уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}$$

двумя методами: методом Бернулли и методом вариации произвольной постоянной, предварительно приведя его к линейному уравнению.

Р е ш е н и е. 1-й м е т о д. Вначале воспользуемся *методом Бернулли*.

1-й шаг. Представим неизвестную функцию $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, при этом $\frac{dy}{dx}=v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}$.

2-й шаг. Подставим выражения для $y(x)$ и ее производной в исходное уравнение:

$$v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}+\frac{u(x)v(x)}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{(u(x)v(x))^2},$$

и вынесем за скобки $u(x)$ в двух последних слагаемых левой части:

$$v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\left[\frac{dv}{dx}+\frac{v(x)}{x}\right]=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{(u(x)v(x))^2}.$$

3-й шаг. Приравняем выражение в квадратной скобке к нулю: $\frac{dv}{dx}+\frac{v(x)}{x}=0$, и решим полученное уравнение методом разделения переменных: $v(x)=\frac{1}{x}$.

4-й шаг. Подставляем найденную функцию в уравнение, полученное на 2-м шаге, получаем уравнение для неизвестной функции $u(x)$:

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\left(u(x)\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Решаем его методом разделения переменных: $u^2du = xdx$;

$$\int u^2du=\int xdx;\quad \frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+C;\quad u(x)=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+3C}.$$

Обозначим $3C = C_1$.

5-й шаг. Выписываем ответ:

$$y(x)=u(x)v(x)=\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+C_1}=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C_1}{x^3}}.$$

2-й м е т о д. Решим теперь это уравнение методом сведения к линейному уравнению. Имеем $\alpha = -2$. Введем замену: $u(x) = (y(x))^{1-\alpha} = (y(x))^{1-(-2)} = (y(x))^3$. Получаем линейное ОДУ первого порядка с ненулевой правой частью:

$$\frac{du}{dx}+\frac{3}{x}\cdot u=\frac{3}{x^2}.$$

Применяем метод *вариации произвольной постоянной.*

1-й шаг. Решаем соответствующее однородное уравнение $\frac{du}{dx}+\frac{3}{x}u=0$ методом разделения переменных:

$$\frac{du}{u}=-3\cdot\frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{u}=-3\int\frac{dx}{x};\quad \ln|u|=-3\ln|x|+\ln C;\quad u(x)=\frac{C}{x^3}.$$

2-й шаг. Заменяем произвольную постоянную интегрирования C на подлежащую определению функцию $C(x)$:

$$u(x)=\frac{C(x)}{x^3}.$$

3-й шаг. Подставляем новое выражение для $y(x)$ в исходное уравнение и получаем уравнение для $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{3}{x^2},\ \text{отсюда}\ \frac{dC}{dx}=3x.$$

4-й шаг. Решаем полученное уравнение методом разделения переменных: $dC=3xdx$; $C(x)=\frac{3x^2}{2}+C_1$.

5-й шаг. Записываем окончательный ответ, возвращаясь к искомой функции: $y(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{3x^2}{2}+C_1\right)\frac{1}{x^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C_1}{x^3}}$.

4.40. Известно частное решение $y_1(x)=e^x$ уравнения Риккати: $\frac{dy}{dx}+2e^xy-y^2(x)=e^x+e^{2x}$. Проинтегрировать это уравнение.

Р е ш е н и е. Произведем замену

$$z(x)=y(x)-y_1(x)=y(x)-e^x,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}+\frac{dy_1}{dx}=\frac{dz}{dx}+e^x;$$

$$\frac{dz}{dx}+e^x+2e^x(z(x)+e^x)-(z+e^x)^2=e^x+e^{2x};\ \ \frac{dz}{dx}=z^2(x).$$

Получили частный случай уравнения Бернулли. В данном случае это уравнение вырождается в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{z^2}=dx;\ \ \int\frac{dz}{z^2}=\int dx;\ \ -\frac{1}{z}=x+C;\ \ z=\frac{1}{C-x}.$$

Первое решение: $y_1=e^x$, второе решение получаем путем разделения переменных: $y_2=e^x+\frac{1}{C-x}$. В итоге два решения исходного уравнения имеют вид:

$$y(x)=0,\ \ y(x)=x+\frac{e^{-x^2/2}}{\int e^{-x^2/2}dx+C}.$$

4.2.3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

Проинтегрировать линейные неоднородные ОДУ первого порядка.

4.41. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = x^2, \quad y(1) = 1{,}5.$

4.42. $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

4.43. $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}, \quad y(\pi/2) = 1.$

4.44. $\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad y(0) = 1.$

4.45. $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{1+x^2} y = \frac{3}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$

4.46. $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{-x}, \quad y(0) = -1.$

Проинтегрировать уравнения Бернулли.

4.47. $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 1.$

4.48. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2, \quad y(1) = 0{,}5.$

4.49. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^2, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$

4.50. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = \frac{x}{2y}, \quad y(0) = 1.$

4.51. $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 0{,}25.$

4.52. $\frac{dy}{dx} - y \cos x = y^2 \cos x, \quad y(1) = 0{,}2.$

4.53. $2\frac{dy}{dx} \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}, \quad y(e) = 1.$

Произвести замену и свести уравнение к линейному неоднородному ОДУ первого порядка или к уравнению Бернулли. Проинтегрировать уравнения.

4.54. $\frac{dy}{dx}\cos y + \sin y = x + 1, \quad y(0) = \pi/2.$

4.55. $\frac{dy}{dx} + x\cos y + \sin y = -x, \quad y(0) = 0.$

4.56. $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = 2xe^{-x^2}\cos^2 y, \quad y(0) = \pi/4.$

Проинтегрировать уравнения Риккати, зная их частные решения.

4.57. $x^2\frac{dy}{dx} - x^2y^2 - xy = 1, \quad y_1(x) = -x^{-1}.$

4.58. $\frac{dy}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y - \frac{y^2}{x} = x + 2, \quad y_1(x) = x.$

4.2.4. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{4.4}$$

левая часть которого является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т. е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$, здесь

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (4.4) было уравнением в полных дифференциалах, является равенство

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \tag{4.5}$$

Частные производные, входящие в формулу (4.5), должны быть непрерывны.

Первый способ нахождения $U(x, y)$. Общий интеграл уравнения $dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ определяется формулой $dU(x, y) = C = \text{const}$. Функция $U(x, y)$ определяется по формуле

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C = \text{const}. \quad (4.6)$$

Здесь x_0, y_0 — некоторые числа или константы.

Второй способ нахождения $U(x, y)$.

1-й шаг. Проверяем условие (4.5).

2-й шаг. Записываем $U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$. Здесь $\varphi(y)$ произвольная константа при интегрировании по x, под неопределенным интегралом подразумевается одна из первообразных.

3-й шаг. Поскольку

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx + \varphi(y)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right) + \frac{d\varphi(y)}{dy},$$

то

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right),$$

отсюда

$$\varphi(y) = \int\left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right)\right]dy + C.$$

Заметим, что для уравнения в полных дифференциалах подынтегральное выражение в квадратных скобках не будет зависеть от x.

Другая возможность заключается в следующем.

1-й шаг. Проверяем условие (4.5).

2-й шаг. Записываем: $U(x, y) = \int Q(x, y)dy + \vartheta(x)$. Здесь $\vartheta(x)$ — произвольная константа при интегрировании по y, под неопределенным интегралом подразумевается одна из первообразных.

3-й шаг. Поскольку

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,y)dy + \vartheta(x)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,y)dy\right) + \frac{d\vartheta(x)}{dx},$$

то

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,y)dy\right),$$

отсюда

$$\vartheta(x) = \int\left[P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,y)dy\right)\right]dx + C_1.$$

Для уравнения в полных дифференциалах подынтегральное выражение в квадратных скобках не будет зависеть от y.

Если левая часть уравнения (4.4) не является полным дифференциалом, но после умножения на функцию $\mu(x, y)$, называемую **интегрирующим множителем**, становится таким:

$$dU(x,y) = \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial(\mu(x,y)P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x,y)Q(x,y))}{\partial x},$$

то возможно применить описанные выше методы интегрирования.

Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ зависит только от x, т. е. $\mu(x, y) = \mu(x)$, если выражение

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$

зависит только от x и не зависит от y. Интегрирующий множитель $\mu(x)$ находится как частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)dx$$

с любым допустимым выбором начального условия.

Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ зависит только от y, т. е. $\mu(x, y) = \mu(y)$, если выражение

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$

зависит только от y и не зависит от x. Интегрирующий множитель $\mu(y)$ находится как частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)dy.$$

4.2.4.1.
ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах.

4.59. $(2y-3)dx+(2x+3y^2)dy=0,\ y(0)=1.$

Р е ш е н и е. *1-й шаг.* Проверяем условие (4.5):

$$P(x,y)=2y-3,\ Q(x,y)=2x+3y^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(2y-3)}{\partial y}=2;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(2x+3y^2)}{\partial x}=2;\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2$$

— условие (4.5) выполнено.

2-й шаг. Записываем:

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)=$$

$$=\int(2y-3)dx+\varphi(y)=2y\int dx-3\int dx+\varphi(y)=2yx-3x+\varphi(y).$$

3-й шаг. Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2x+3y^2=\frac{\partial(2xy-3x+\varphi(y))}{\partial y}=2x+\frac{d\varphi}{dy},$$

то $\dfrac{d\varphi(y)}{dy}=3y^2$, отсюда

$$\varphi(y)=\int 3y^2dy+C=3\frac{y^3}{3}+C=y^3+C.$$

Получили общее решение: $U(x,y)=2xy-3x+y^2+C=0$.

Решение задачи Коши с учетом начального условия:

$$U(x,y)=2xy-3x+y^2-1=0.$$

1-й шаг. Теперь вначале произведем интегрирование: $Q(x, y) = 2x + 3y^2$, по y.

2-й шаг. Записываем:

$$U(x, y) = \int Q(x, y)dy + \vartheta(x) = \int (2x + 3y^2)dy + \vartheta(x) =$$

$$= 2x\int dy + 3\int y^2 dy + \vartheta(x) = 2yx + y^3 + \varphi(y).$$

3-й шаг. Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2y - 3 = \frac{\partial(2xy + y^3 + \vartheta(x))}{\partial x} = 2y + \frac{d\vartheta}{dx},$$

то $\dfrac{d\vartheta(x)}{dx} = -3$, отсюда

$$\vartheta(x) = -\int 3dx + C_1 = -3x + C_1 = -3x + C_1.$$

Получили общее решение: $U(x, y) = 2xy - 3x + y^2 + C_1 = 0$.

4.60. $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3ydy = 0$, $y(0) = 1$.

Р е ш е н и е. *1-й шаг.* Проверяем условие (4.5):

$$P(x, y) = 3x^2y^2 + 7, Q(x, y) = 2x^3y.$$

2-й шаг. Воспользуемся формулой (4.6):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} (3x^2y^2 + 7)dx + \int_{y_0}^{y} 2x_0^3 ydy = C,$$

$$U(x, y) = y^2\int_{x_0}^{x} (3x^2dx + 7\int_{x_0}^{x} dx + 2x_0^3\int_{y_0}^{y} ydy = C,$$

$$U(x, y) = y^2x^3\Big|_{x_0}^{x} + 7x\Big|_{x_0}^{x} + x_0^3y^2\Big|_{y_0}^{y} = C,$$

$$U(x, y) = y^2(x^3 - x_0^3) + 7(x - x_0) + x_0^3(y^2 - y_0^2) = C,$$

$$U(x, y) = y^2x^3 + 7x = C + 7x_0 + x_0^3y_0^2 \equiv C_1.$$

Здесь x_0, y_0 — априорно выбранные числа (константы). Введем обозначение $C + 7x_0 + x^3{}_0y^2{}_0 \equiv C_1$, тогда окончательный вид общего решения в неявной форме примет вид $y^2x^3 + 7x = C_1$.

4.61. Проинтегрировать уравнение

$$(x^2y^2 - 1)dx + 2x^3ydy = 0,$$

определив интегрирующий множитель.

Р е ш е н и е.

$$P(x, y) = x^2y^2 - 1, Q(x, y) = 2x^3y, \frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y,$$

таким образом, равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется и уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Вначале попытаемся найти интегрирующий множитель, зависящий от y. Для этого составим уравнение:

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2y^2 - 1} \cdot (2x^2y - 6x^2y) = -\frac{4x^2y}{x^2y^2 - 1}.$$

Не получилось выражения, зависящего только от y. Будем искать интегрирующий множитель, зависящий от x. Составим уравнение:

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2x^3y} \cdot (2x^2y - 6x^2y) = \frac{-4x^2y}{2x^3y} = -\frac{2}{x}.$$

Поскольку это выражение зависит только от x, то интегрирующий множитель $\mu(x)$ существует и определяется из уравнения

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x} \cdot dx.$$

Имеем:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = -2\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|\mu| = -2\ln|x| + \ln C, \quad \mu = \frac{C}{x^2}.$$

Выберем из этого общего решения частное ненулевое, положив, например, $C = 1$: $\mu = \frac{1}{x^2}$.

Умножим теперь обе части исходного уравнения на интегрирующий множитель:

$$\frac{1}{x^2} \cdot (x^2y^2 - 1)dx + \frac{1}{x^2} \cdot 2x^3y dy = \frac{1}{x^2} \cdot 0.$$

Получаем:

$$\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx + 2xy dy = 0.$$

Имеем:

$$P(x, y) = y^2 - \frac{1}{x^2}, \quad Q(x, y) = 2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Таким образом, равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется, и уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Ищем вначале представление для $U(x, y)$ исходя из того, что

$$dU = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = 2xy,$$

отсюда

$$U(x, y) = \int 2xy dy + \varphi(x); \quad U(x, y) =$$

$$= xy^2 + \varphi(x); \quad \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + \frac{d\varphi}{dx} = P(x, y) = y^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Для $\varphi(x)$ получается дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad d\varphi = -\frac{dx}{x^2}; \quad \int d\varphi = -\int \frac{dx}{x^2}; \quad \varphi = \frac{1}{x^2} - C.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$U(x, y) = xy^2 + \frac{1}{x} - C = 0 \text{ или } xy^2 + \frac{1}{x} = C.$$

4.2.4.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что они являются уравнениями в полных дифференциалах.

4.62. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0, \ y(1) = 1.$

4.63. $(x + \ln|y|)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0, \ y(0) = \pi/2.$

4.64. $(e^y + ye^x + 3)dx + (xe^y + e^x - 2)dy = 0, \ y(0) = 1.$

4.65. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0, \ y(0) = 2.$

4.66. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0, \ y(4) = 0.$

4.67. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0, \ y(1) = 0.$

4.68. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx-\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy=0,\quad y(1)=1.$

Проинтегрировать уравнения, определив интегрирующий множитель.

4.69. $(x+y^2)dx-xydy=0,\quad y(1)=2.$

4.70. $(y+xy^2)dx-xdy=0,\quad y(1)=2.$

4.71. $2xy\ln ydx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0,\quad y(0)=2.$

4.72. $(e^x-y)\sqrt{y}dx+\left(1-x\sqrt{y}\right)dy=0,\quad y(0)=0.$

4.73. $y^2\cos x\sin ydx+(1+y^2\sin x\cos y)dy=0,\quad y(0)=-1.$

4.74. $(yx^2-1)dx+(x^3+x\cos y)dy=0,\quad y(2)=0.$

4.75. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0,\quad y(1)=0.$

4.76. $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\sin x\right)dx+(\cos y+2y)dy=0,\quad y(0)=0.$

4.2.5. ОДУ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной, называется уравнение вида $F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$. Введем параметрическое представление этого уравнения, обозначив производную через $p=\frac{dy}{dx}$: $F(x, y, p)=0$.

Теорема 4.3. Пусть функция $F(x, y, p)$ непрерывна по всем переменным и непрерывно дифференцируема по x и p в окрестности точки $A(x_0, y_0, p_0)$. Пусть выполняются условия: $F(x_0, y_0, p_0)=0$ и $F'_p(x_0, y_0, p_0)\neq 0$. Тогда существует единственное решение задачи Коши:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0,\quad y(x_0)=y_0.$$

Особым решением называется такое решение обыкновенного дифференциального уравнения, которое во всех своих точках (x, y) имеет по крайней мере две или более интегральных кривых. Такие интегральные кривые будем называть **особыми интегральными кривыми**. Другими словами, в каждой точке (x, y) нарушается единственность решения.

Чтобы отыскать особые решения, нужно исключить $\frac{dy}{dx}$ из уравнений

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \ \text{ и } \ F'_{dy/dx}\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Вводя параметр $p=\frac{dy}{dx}$ и исключая этот параметр из системы уравнений $F(x, y, p) = 0$ и $F'_p(x, y, p) = 0$, получаем неявное уравнение $\Phi(x, y) = 0$ так называемой ***p*-дискриминантной кривой**. Если какая-либо из ветвей p-дискриминантной кривой есть интегральная кривая уравнения, то она будет представлять собой особое решение. Обратное утверждение не всегда выполняется, т. е. не всякая ветвь p-дискриминантной кривой является особым решением уравнения.

Если решение уравнения $F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$ может быть представлено в виде однопараметрического семейства кривых, уравнения которых зависят от произвольной константы интегрирования C, т. е. $\Omega(x, y, C) = 0$, то из системы уравнений $\Omega(x, y, C) = 0$ и $\frac{\partial\Omega}{\partial C}(x, y, C) = 0$ может быть найдено уравнение $\Psi(x, y) = 0$ (или в явном виде $y = y(x)$) огибающей этого семейства кривых. Это уравнение огибающей представляет собой особое решение исходного дифференциального уравнения $F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$ и называется **C-дискриминантной кривой**.

Если уравнение можно разрешить (пусть неоднозначно) относительно $y = f(x, p)$, то $dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp$. Используя равенство $dy = pdx$, представим исходное уравнение в одном из случаев его возможного разрешения в виде $P(x, y)dx + Q(x, y)dp = 0$. Общее решение этого уравнения: $x = \phi(p, C)$, где C — произвольная константа интегрирования. Решение исходного уравнения в параметрической форме будет иметь вид $x = \phi(p, C)$; $y = f(x, p)$.

Уравнение Лагранжа имеет вид $y = xa\left(\frac{dy}{dx}\right) + b\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Вводя замену $p = \frac{dy}{dx}$ и записывая $dy = pdx$, можно получить следующее представление уравнения Лагранжа:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{da/dp}{a(p) - p} + \frac{db/dp}{a(p) - p} = 0. \qquad (4.7)$$

Это линейное уравнение относительно $x(p)$. Интегрируя его по p, получим $x = x(p, C)$.

Общее уравнение Лагранжа в параметрической форме имеет вид: $x = x(p, C)$, $y = x(p, C)a(p) + b(p)$.

Уравнение Клеро имеет вид $y = x\frac{dy}{dx} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)$ и является частным случаем уравнения Лагранжа. Общее решение этого уравнения таково: $y = Cx + b(C)$. Особое решение уравнения Клеро в некоторых случаях получается исключением параметра p из уравнений $y = xp + b(p)$, $x + \frac{db(p)}{dp} = 0$.

4.2.5.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.77. Найти особые решения уравнения

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Р е ш е н и е. Введем параметр $p = \frac{dy}{dx}$ и перепишем уравнение так: $y = xp + p^2$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}p+x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx},\ \text{или}\ p=p+x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}.$$

Перепишем последнее уравнение в виде $(x+2p)\frac{dp}{dx}=0$. Это уравнение имеет два решения: а) $p(x)=C$; б) $p(x)=-\frac{x}{2}$.

В случае а) подставим вместо p его представление в уравнение $y=xp+p^2$, имеем:

$$y=xC+C^2. \tag{4.8}$$

В случае б) получаем:

$$y=-\frac{x^2}{4}. \tag{4.9}$$

Это решение является C-дискриминантной кривой решения (4.8). В самом деле, исключим C из уравнений $\Omega(x, y, C)=C^2+xC-y=0$ и $\frac{\partial\Omega}{\partial C}(x, y, C)=2C+x=0$. Получаем: $y=\frac{x^2}{4}$.

Последнее решение является особым, так как на нем выполняется условие

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{y=-x^2/4}=2y'+x\Big|_{y=-x^2/4}=2\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)+x=0.$$

4.78. Найти особые решения уравнения

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(6x+y)\frac{dy}{dx}+6xy=0.$$

Р е ш е н и е. Разрешая это уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получим два уравнения: $\frac{dy_1}{dx}=y_1$ и $\frac{dy_2}{dx}=6x$, правые части которых удовлетворяют условию существования и единственности решения задачи Коши в любой точке плоскости (x, y). Общие решения этих уравнений таковы: $y_1=C_1e^x$, $y_2=3x^2+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные константы интегрирования. Геометрическим местом точек, где нарушено условие $F'_p(x_0, y_0, p_0)\neq 0$ теоремы о существовании и единственности решения, являются точки прямой $y=-6x-12$. В самом деле,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{y=-6x}=2y'-6x-y=-12-6x-y=-12-6x+6x+12=0.$$

Линия $y = 6x$ является p-дискриминантной кривой. Исключив p из уравнений $F(x, y, p) = p^2 - (6x + y)p + 6xy = 0$ $\frac{\partial F}{\partial p} = 2p - (6x + y) = 0$, получим $\Phi(x, y) = y - 6x = 0$, однако $y = 6x$ не является интегральной кривой исходного уравнения, следовательно, $y = 6x$ не есть особое решение.

4.79. Проинтегрировать уравнение Лагранжа

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx}.$$

Р е ш е н и е. Перейдем к параметрическому представлению $p = \frac{dy}{dx}$, тогда в соответствии с формулой (4.7) получим:

$$a(p) = p^2, \quad b(p) = -p,$$

$$\frac{dx}{xp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p^2 - p},$$

$$x = u(p)v(p),$$

$$v\frac{du}{dp} + u\frac{dv}{dp}\frac{2}{p-1}uv = \frac{1}{p^2 - p},$$

$$v\frac{du}{dp} + u\left[\frac{dv}{dp} + \frac{2}{p-1}v\right] = \frac{1}{p^2 - p},$$

$$\left[\frac{dv}{dp} + \frac{2}{p-1}v\right] = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dp}{p-1}, \quad \int\frac{dv}{v} = -2\int\frac{dp}{p-1},$$

$$\ln|v| = -2\ln|p-1|,$$

$$v = \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$\frac{1}{(p-1)^2}\frac{du}{dp} = \frac{1}{p(p-1)},$$

$$du = \frac{(p-1)dp}{p},$$

$$\int du = \int dp - \int\frac{dp}{p},$$

$$u = p - \ln|p| + C.$$

Итак,

$$\begin{cases} x = uv = \dfrac{p - \ln|p| + C}{(p-1)^2}, \\ y = xp^2 - p. \end{cases}$$

4.80. Проинтегрировать уравнение Клеро

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2(dy/dx)}.$$

Р е ш е н и е. Положим $p = \dfrac{dy}{dx}$, тогда из уравнения получим $y = xp + \dfrac{1}{2p}$. Продифференцируем обе части последнего равенства и заменим dy на pdx: $pdx = pdx + xdp - \dfrac{dp}{2p^2}$.

Преобразуем полученное уравнение: $dp\left(x - \dfrac{1}{2p^2}\right) = 0$. Отсюда следует: а) $dp = 0$, $p = C = \text{const}$ и общее решение уравнения Клеро имеет вид $y = Cx + \dfrac{1}{2C}$; б) из равенства нулю второго множителя получим $x = \dfrac{1}{2p^2}$; исключим параметр p из этого уравнения и уравнения $y = xp + \dfrac{1}{2p}$, имеем $y^2 = 2x$.

4.2.5.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро.

4.81. $y = 2x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{(dy/dx)}$. **4.82.** $y = 0{,}5x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{(dy/dx)}$.

4.83. $y = 2x\dfrac{dy}{dx} + \ln\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. **4.84.** $y = \dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

4.85. $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{(dy/dx)}$. **4.86.** $y = x\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

4.87. $y = 1{,}5x\frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}}$. **4.88.** $y = x\frac{dy}{dx} + 5\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

4.89. $y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. **4.90.** $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}$.

4.91. $y = -x\frac{dy}{dx} - 0{,}5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

4.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.3.1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Дифференциальные уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$. Общее решение получается путем n последовательных интегрирований:

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)}(x) = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$$

и т. д.

2. Дифференциальные уравнения, содержащие в явном виде аргумент x и только две соседние производные высшего порядка: $F(x, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$. Замена $z(x) = y^{(n-1)}(x)$ сводит исходное уравнение к уравнению первого порядка $F(x, z(x), z'(x)) = 0$. После нахождения $z(x, C_1)$, где C_1 — произвольная константа интегрирования, получается уравнение, рассмотренное в пункте 1, решение которого достигается путем $(n-1)$-кратного последовательного интегрирования.

3. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде аргумент x, но содержащие функцию $y(x)$ и ее первые две производные $y'(x)$ и $y''(x)$: $F(y, y', y'') = 0$. Замена $p(y) = y'(x)$ позволяет получить $y''(x) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p(y)$ и перевести исходное уравнение второго порядка в уравнение первого порядка относительно $p(y)$ с аргументом y: $F(y, p(y), p(y)p'(y)) = 0$. После нахождения $y'(x) = p(y, C_1)$, где C_1 — первая произвольная константа интегрирования, решаем полученное уравнение методом разделения переменных: $\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx$, $\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = \int dx + C_2$, здесь C_2 — вторая произвольная константа интегрирования.

4.3.1.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.92. Найти решение задачи Коши для уравнения вида $y^{(n)}(x) = F(x)$: $y''' = 24x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

Р е ш е н и е. После первого интегрирования получаем $y''(x) = \int 24x dx + C_1 = 24 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$. После второго интегрирования найдем $y'(x) = \int (12x^2 + C_1) dx = 12 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$. Наконец, после третьего интегрирования запишем общее решение:

$$y(x) = \int (4x^3 + C_1 x + C_2) dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Используя полученные выражения для $y''(x)$, $y'(x)$ и $y(x)$, с помощью начальных условий найдем: $C_1 = 4$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 3.$$

4.93. Решить задачу Коши с дифференциальным уравнением $3y'' = 4\frac{x^3}{(y')^2}$ и начальным условием $y(1) = 0, y'(1) = 2$.

После замены $y' = p(x)$ получим уравнение $3p' = 4\frac{x^3}{p^2}$.

Р е ш е н и е. Найдем его общее решение, для этого перепишем уравнение в виде: $3\frac{dp}{dx} = 4\frac{x^3}{p^2}$. Разделим переменные: $3p^2dp = 4x^3dx$. Интегрируем обе части по своим переменным:

$$\int 3p^2dp = \int 4x^3dx, \quad 3\frac{p^3}{3} = 4\frac{x^4}{4} + C, \quad p^3 = x^4 + C.$$

Получили общее решение в неявной форме. Найдем общее решение в явной форме: $p = \sqrt[3]{x^4 + C}$.

Воспользуемся начальным условием, найдем конкретное числовое значение произвольной константы C и запишем частное решение задачи Коши:

$$2 = \sqrt[3]{1^4 + C}, \quad 2^3 = 1 + C, \quad C = 7, \quad p = \sqrt[3]{x^4 + 7}.$$

Отсюда с учетом $y(1) = 0$

$$y(x) = \int_1^x p(t)dt = \int_1^x \sqrt[3]{t^4 + 7}dt.$$

Данный интеграл в элементарных функциях не имеет первообразных, в последующих частях пособия будет показано, как такого типа интегралы находятся численно.

4.94. Решить задачу Коши: $y'' - 8y^3 = 0; y(0) = -1; y'(0) = 2$.

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения на y' и заметим, что в левой части получается полная производная:

$$y' \cdot y'' - 8y^3 \cdot y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'^2}{2} - 2y^4\right) = 0.$$

Отсюда, учитывая начальные условия, найдем

$$y'^2 = 4y^4 + C_1 \Rightarrow y' = 2y^2.$$

Интегрируем последнее уравнение и учитываем начальное условие $y(0) = -1$:

$$-\frac{1}{y} = 2x + C_2 \Rightarrow y = -\frac{1}{1 + 2x}.$$

4.3.1.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

Проинтегрировать уравнения.

4.95. $yy''' - y'y'' = 0$.

4.96. $(y^3 + y)y'' - (3y^2 - 1)y'^2 = 0$.

4.97. $y \cdot y'' + \dfrac{y \cdot y'}{x} + y'^2 = 0$.

4.98. $xyy'' + y \cdot y' = xy'^2 + y^2$.

4.99. $xyy'' + 2xy'^2 = 2yy'$.

4.100. $xyy'' + xy'^2 + yy' = 0$.

Решить задачу Коши.

4.101. $(yy'' - y'^2)\sin x + y^2 = (\sin x - \cos x)yy'$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

4.102. $xyy'' + (1 + x^2)yy' + xy^2 = xy'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

4.103. $3y''y''' - 2y''^3 = 16$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

4.104. $xyy'' + y^2 = xy'^2 + (x - 1)yy'$, $y(1) = y'(1) = 2$.

4.105. $(y + 2)y'' + y'^2 = \cos 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

4.106. $2(yy'' - y'^2) = (y'^2 - 2y'y)e^{x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4.107. $x(yy'' - y'^2) = yy' \ln \dfrac{y}{y'}$; $y(1) = y'(1) = 1$.

4.108. $xy''' - y'' = x^2 \cos x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

4.3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.3.2.1. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВРОНСКОГО И ГРАММА

Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называется линейно независимой на отрезке $[a; b]$, если равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \qquad (4.10)$$

возможно при всех $x \in [a; b]$ лишь в случае равенства нулю всех действительных чисел $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$.

Если же существует хотя бы одно действительное число из набора чисел $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$, при котором справедливо равенство (4.10), то система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на отрезке $x \in [a; b]$.

Определителем Вронского, или вронскианом, для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, $(n-1)$-раз дифференцируемых на отрезке $x \in [a; b]$, называется функция

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_n \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n' \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (4.11)$$

Теорема 4.4. Если вронскиан системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in \in [a; b]$, то эта система функций линейно независима на отрезке $[a; b]$.

Теорема 4.5. Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $[a; b]$, то ее вронскиан тождественно равен нулю при любом $x \in [a; b]$.

Введем следующее обозначение для системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, заданных на отрезке $x \in [a; b]$:

$$(y_1(x);\ y_2(x)) = \int_a^b y_k(x) y_m(x) dx, \quad k, m = 1, 2, \dots, n.$$

Определителем Грамма для системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, заданных на отрезке $x \in [a; b]$, назовем число, определяемое так:

$$W(x) = \begin{vmatrix} (y_1(x); y_1(x)) & (y_1(x); y_2(x)) & \dots & (y_1(x); y_n(x)) \\ (y_2(x); y_1(x)) & (y_2(x); y_2(x)) & \dots & (y_2(x); y_n(x)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n(x); y_1(x)) & (y_n(x); y_2(x)) & \dots & (y_n(x); y_n(x)) \end{vmatrix}. \qquad (4.12)$$

Теорема 4.6. Для того чтобы система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ была линейно зависима на отрезке $x \in [a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Грамма был равен нулю.

4.3.2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НУЛЕВЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Уравнения вида

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (4.13)$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n — постоянные действительные числа, называются **линейными ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и нулевыми правыми частями.** Часто уравнения, правые части которых равны нулю, называют **однородными.**

Теорема 4.7. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — частные решения уравнения (4.13), то и любая их линейная комбинация $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ также есть решение этого уравнения.

Алгебраическое уравнение

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (4.14)$$

называется **характеристическим уравнением** для уравнения (4.13). В табл. 4.1 помещены частные линейно независимые решения уравнения (4.13) в зависимости от корней уравнения (4.14).

Линейно независимую на отрезке $x \in [a; b]$ систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$, каждая из которых является решением уравнения (4.13), называют **фундаментальной системой решения** этого уравнения на данном отрезке.

Таблица 4.1

Характеристика корней уравнения (4.13)	Частные решения уравнения (4.13), порождаемые корнем уравнения (4.14)
r — простой (однократный) действительный корень	e^{rx}
r — действительный корень кратности $k \leqslant n$	e^{rx}, xe^{rx}, ..., $x^{k-1}e^{rx}$
$\alpha \pm \beta x$ — простой (однократный) комплексно-сопряженный корень	$e^{\alpha x}\cos \beta x$, $e^{\alpha x}\sin \beta x$
$\alpha \pm \beta x$ — комплексно-сопряженные корни кратности $k \leqslant \frac{n}{2}$	$e^{\alpha x}\cos \beta x$, $xe^{\alpha x}\cos \beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos \beta x$; $e^{\alpha x}\sin \beta x$, $xe^{\alpha x}\sin \beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin \beta x$

Рассмотрим запись общего решения уравнения (4.13) в зависимости от состава корней характеристического уравнения.

Пусть имеются простые вещественные корни $r_1, r_2, \ldots, r_k$, кратные вещественные корни r_{k+1} (кратности k_1), r_{k+2} (кратности k_2), ..., r_{k+l} (кратности k_l), простые комплексно-сопряженные корни $\alpha_{k+l+1} \pm i\beta_{k+l+1}, \alpha_{k+l-2} \pm i\beta_{k+l-2}, \ldots, \alpha_{k+l+p} \pm i\beta_{k+l+p}$ и кратные комплексно-сопряженные корни (для краткости записи будем полагать, что имеется только одна пара) $\alpha \pm i\beta$ (кратности q). Здесь $k + k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2p + 2q = n$.

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_k e^{r_k x}) +$$
$$+ (D_1 e^{r_{k+1} x} + D_2 x e^{r_{k+1} x} + \ldots + D_{k_1} x^{k_1 - 1} e^{r_{k+1} x}) +$$
$$+ (E_1 e^{r_{k+2} x} + E_2 x e^{r_{k+2} x} + \ldots + E_{k_2} x^{k_2 - 1} e^{r_{k+2} x}) + \ldots +$$
$$+ (F_1 e^{r_{k+l} x} + F_2 x e^{r_{k+l} x} + \ldots + F_{k_l} x^{k_l - 1} e^{r_{k+l} x}) +$$
$$+ (\Theta_1 e^{\alpha_{k+l+1} x} \cos\beta_{k+l+1} x + \Omega_1 e^{\alpha_{k+l+1} x} \sin\beta_{k+l+1} x +$$
$$+ \Theta_2 e^{\alpha_{k+l+2} x} \cos\beta_{k+l+2} x + \Omega_2 e^{\alpha_{k+l+2} x} \sin\beta_{k+l+2} x + \ldots +$$
$$+ \Theta_p e^{\alpha_{k+l+p} x} \cos\beta_{k+l+p} x + \Omega_p e^{\alpha_{k+l+p} x} \sin\beta_{k+l+q} x) +$$
$$+ (\Phi_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + \Psi_1 e^{\alpha x} \sin\beta x +$$
$$+ \Phi_2 x e^{\alpha x} \cos\beta x + \Psi_2 x e^{\alpha x} \sin\beta x + \ldots +$$
$$+ \Phi_q x^{q-1} e^{\alpha x} \cos\beta x + \Psi_q x^{q-1} e^{\alpha x} \sin\beta x).$$

Уравнения вида

$$a_n (ax + b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + a_1 (ax + b) y' + a_0 y = 0$$

называются **уравнениями Эйлера.** Подстановкой $e^t = ax + b$ эти уравнения сводятся к линейным ОДУ с постоянными коэффициентами.

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимые на отрезке $[a; b]$ функции, то они составляют фундаментальную систему решений следующего линейного ОДУ n-го порядка

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.15)$$

относительно неизвестной функции $y(x)$, при этом $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений этого уравнения. Коэффициент при $y^{(n)}(x)$ есть определитель Вронского $W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$. Точки, в которых этот определитель обращается в ноль, будут особыми точками уравнения (4.15).

4.3.2.3. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.109. Найти решение задачи Коши: $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни действительные и различные: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Найдем $y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$. Воспользуемся начальными условиями:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2 = 1,$$
$$y'(0) = C_1 e^0 + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + 2C_2 = 0.$$

Получили систему уравнений $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 + 2C_2 = 0. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и полученное уравнение запишем вместо второго. Первое уравнение сохраним: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_2 = -1. \end{cases}$

Подставим найденное $C_2 = -1$ в первое уравнение и определим: $C_1 = 2$.

О т в е т. Общее решение уравнения: $y(x) = C_1 e^x - C_2 e^{2x}$. Решение задачи Коши: $y(x) = 2e^x + e^{2x}$.

4.110. Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение: $r^2 - 4r + 4 = 0$. Его корни действительные и равны друг другу: $r_1 = r_2 = r = 2$. Общее решение имеет вид:

$$y(x)(C_1 + xC_2)e^{rx} = (C_1 + xC_2)e^{2x},$$
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Найдем $y'(x) = C_2e^{2x} + 2(C_1 + xC_2)e^{2x} = (2C_1 + C_2 + 2xC_2)e^{2x}$. Воспользуемся начальными условиями:

$$y(0) = (C_1 + 0 \cdot C_2)e^{2 \cdot 0} = C_1 = 2,$$
$$y'(0) = C_1e^0 + 2C_2e^{2 \cdot 0} =$$
$$= (2C_1 + C_2 + 0 \cdot 2 \cdot C_2)e^{2 \cdot 0} = 2C_1 + C_2 = 1.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ 2C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение $C_1 = 2$ и определим $C_2 = -3$.

О т в е т. Общее решение уравнения: $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$. Решение задачи Коши: $y(x) = (1 - 3x)e^{2x}$.

4.111. Найти решение задачи Коши: $y'' - 16y' + 20y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение $r^2 - 16r + 20 = 0$. Его корни комплексно-сопряженные:

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} =$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm i.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x} = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{2x}.$$

Найдем:

$$y'(x) = (-C_1\sin x + C_2\cos x)e^{2x} + (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{2x} \cdot 2 =$$
$$= ((2C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 + 2C_2)\sin x))e^{2x}.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$y(0) = (C_1\cos 0 + C_2\sin 0)e^{2 \cdot 0} = C_1 = 3,$$
$$y'(0) = ((2C_1 + C_2)\cos 0 + (-C_1 + 2C_2)\sin 0))e^{2 \cdot 0} =$$
$$= 2C_1 + C_2 = 0.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = 3; \\ 2C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Решение системы имеет вид: $C_1 = 3$ в первом уравнении, определим $C_2 = -6$.

Ответ. Общее решение уравнения: $y(x) = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{2x}$. Решение задачи Коши: $y(x) = (3\cos x - 6\sin x)e^{2x}$.

4.112. Найти общее решение уравнения $y^{(IV)} + 29y'' + 100y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^4 + 29r^2 + 100 = 0$. Его корни комплексно-сопряженные: $r_{1,2} = \pm 2i$, $r_{3,4} = \pm 5i$. Общий интеграл:

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3\cos 5x + C_4\sin 5x.$$

4.113. Найти общее решение уравнения $y^{(VII)} + 8y^{(V)} + 16y''' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^3(r^2 + 4)^2 = 0$. Его корни: $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, $r_4 = r_5 = -2i$, $r_6 = r_7 = 2i$. Общий интеграл:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)\cos 2x + (C_6 + C_7x)\sin 2x.$$

4.3.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕНУЛЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Уравнения вида

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_1y' + a_0y = f(x), \qquad (4.16)$$

где $f(x) \neq 0$ — непрерывная функция, а $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — постоянные действительные числа, называются **линейными ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и ненулевыми правыми частями.** Часто уравнения, правые части которых не равны нулю, называют **неоднородными.**

Теорема 4.8. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — фундаментальная система решений и $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ — общее решение уравнения с нулевой правой частью $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_1y' + a_0y = 0$, а $y^*(x)$ — частное решение уравнения (4.16), то $Y(x) = y(x) + y^*(x)$ есть общее решение уравнения (4.16).

Теорема 4.9. Если $y^*_1(x)$ — частное решение уравнения $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_1y' + a_0y = f_1(x)$, а $y^*_2(x)$ — частное

решение уравнения $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_1 y' + a_0 y = f_2(x)$, то $y^*(x) = y^*_1(x) + y^*_2(x)$ — частное решение уравнения $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) + f_2(x)$.

Метод построения частных решений уравнения (4.16) по образу и подобию правой части (метод подбора).

Таблица 4.2

Частные решения уравнения (4.16) Вид правой части уравнения	Корни характеристического уравнения $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots a_1 r + a_0 = 0$	Частные решения уравнения, порождаемые правой частью уравнения
$f(x) = P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$ — многочлен степени k	Нет ни одного корня, равного 0	$y^*(x) = \tilde{P}_k(x) = \sum_{i=0}^{k} d_i x^i$
$f(x) = e^{\lambda x} P_k(x) = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$	Нет ни одного корня, равного λ	$y^*(x) = e^{\lambda x} \tilde{P}_k(x) = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{k} d_i x^i$
$f(x) = e^{\lambda x} P_k(x) = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$	Число λ — корень кратности p	$y^*(x) = e^{\lambda x} x^p \tilde{P}_k(x) = e^{\lambda x} x^p \sum_{i=0}^{k} d_i x^i$
$f(x) = P_n(x)\cos\alpha x + Q_m(x)\sin\alpha x = \cos\alpha x \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sin\alpha x \sum_{j=0}^{m} s_j x^j$	Числа $\pm\alpha i$ не являются корнями	$y^*(x) = \tilde{P}_l(x)\cos\alpha x + \tilde{Q}_l(x)\sin\alpha x = \cos\alpha x \sum_{i=0}^{l} \tilde{b}_i x^i + \sin\alpha x \sum_{j=0}^{l} \tilde{s}_j x^j$, l — наибольшая из степеней n и m
$f(x) = P_n(x)\cos\alpha x + Q_m(x)\sin\alpha x = \cos\alpha x \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sin\alpha x \sum_{j=0}^{m} s_j x^j$	Числа $\pm\alpha i$ не являются корнями кратности p	$y^*(x) = x^p(\tilde{P}_l(x)\cos\alpha x + \tilde{Q}_l(x)\sin\alpha x) = x^p \left(\cos\alpha x \sum_{i=0}^{l} \tilde{b}_i x^i + \sin\alpha x \sum_{j=0}^{l} \tilde{s}_j x^j \right)$, l — наибольшая из степеней n и m

Продолжение табл. 12

$f(x) = e^{\lambda x}(P_n(x)\cos\alpha x + Q_m(x)\sin\alpha x) = e^{\lambda x}\left(\cos\alpha x\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sin\alpha x\sum_{j=0}^{m} s_j x^j\right)$	Числа $\lambda \pm \alpha x$ не являются корнями	$y^*(x) = e^{\lambda x}(\tilde{P}_l(x)\cos\alpha x + \tilde{Q}_l(x)\sin\alpha x) = e^{\lambda x}\left(\cos\alpha x\sum_{i=0}^{l} \tilde{b}_i x^i + \sin\alpha x\sum_{j=0}^{l} \tilde{s}_j x^j\right)$. l — наибольшая из степеней n и m
$f(x) = e^{\lambda x}(P_n(x)\cos\alpha x + Q_m(x)\sin\alpha x) = e^{\lambda x}\left(\cos\alpha x\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sin\alpha x\sum_{j=0}^{m} s_j x^j\right)$	Числа $\lambda \pm \alpha x$ не являются корнями кратности p	$y^*(x) = x^p e^{\lambda x}(\tilde{P}_l(x)\cos\alpha x + \tilde{Q}_l(x)\sin\alpha x) = x^p e^{\lambda x}\left(\cos\alpha x\sum_{i=0}^{l} \tilde{b}_i x^i + \sin\alpha x\sum_{j=0}^{l} \tilde{s}_j x^j\right)$. l — наибольшая из степеней n и m

Пусть

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \qquad (4.17)$$

общее решение уравнения с нулевой правой частью $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y + a_0 y = 0$.

Заменим в выражении (4.17) произвольные константы интегрирования $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функциями $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, подлежащими определению, т. е. будем искать общее решение уравнения (4.17) в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x). \qquad (4.18)$$

Функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) + \ldots + y_n(x)C_n'(x) = 0, \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) + \ldots + y_n'(x)C_n'(x) = 0, \\ \ldots, \\ y_1^{(n-1)}(x)C_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)C_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-1)}(x)C_n'(x) = \dfrac{f(x)}{a_n}. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы является определителем Вронского и он отличен от нуля, то по правилу Крамера система имеет единственное решение в виде обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Методом разделения переменных получим:

$$C_i(x) = \int \omega_i(x)dx + \tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\tilde{C}_i, i = 1, 2, \ldots, n$ — произвольные константы интегрирования.

4.3.3.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.114. Рассмотрим линейное уравнение четвертого порядка:

$$y^{IV} - y'' - 2y = 12 \sin 3x \cos 2x - 6(e^{-2x} + \sin 5x).$$

Из характеристического уравнения

$$r^4 - r^2 - 2 = 0$$

определяем корни:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad r_{3,4} = \pm i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения y_0 равно

$$y_0 = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом подбора по правой части, но сначала преобразуем ее:

$$12 \sin 3x \cos 2x - 6(e^{-2x} + \sin 5x) =$$
$$= 6 \sin 5x + 6 \sin x - 6e^{-2x} - 6 \sin 5x = 6 \sin x - 6e^{-2x}.$$

Согласно рекомендациям табл. 4.2 (i — простой корень характеристического уравнения, -2 — не является его корнем) частное решение y_1 будем искать в виде:

$$y_1 = x(A \sin x + B \cos x) + Ce^{-2x}.$$

Неизвестные постоянные A, B, C определяем после подстановки y_1 в исходное уравнение и последующим сравне-

нием коэффициентов при функциях $\sin x$, $\cos x$, e^{-2x} в обеих частях полученного равенства. Приведем результат этой подстановки:

$$-6A\sin x + 6B\cos x + 10Ce^{-2x} = 6\sin x - 6e^{-2x}.$$

Отсюда определяем:

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -\frac{3}{5}.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + x\cos x - \frac{3}{5}e^{2x}.$$

4.115. Решим задачу Коши:

$$y^{IV} + y'' = 4\sin^2\frac{x}{2},$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Без труда определяем корни характеристического уравнения $r^4 + r^2 = 0$:

$$r_{1,2} = 0, \; r_{3,4} = \pm i.$$

Правая часть преобразуется к виду

$$4\sin^2\frac{x}{2} = 4\frac{1-\cos x}{2} = 2 - 2\cos x.$$

Поскольку $r = 0$ — двойной корень, а $r = i$ — простой корень характеристического уравнения, то согласно табл. 4.2 частное решение исходного уравнения нужно искать в виде

$$y_1 = x(A\sin x + B\cos x) + Cx^2.$$

После подстановки y_1 в исходное уравнение получим:

$$6A\cos x - 2B\sin x + 2C = 2 - 2\cos x.$$

Отсюда:

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = 1.$$

Следовательно,

$$y_1 = -\frac{1}{3}x\sin x + x^2.$$

Общее решение однородного уравнения y_0 имеет вид:

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3\sin x + C_4\cos x,$$

и следовательно, общее решение исходного уравнения равно:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + C_4 \cos x - \frac{1}{3} x \sin x + x^2.$$

Определим постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из начальных условий:

$$y(0) = 0 = C_1 + C_4,$$
$$y'(0) = 0 = C_2 + C_3,$$
$$y''(0) = 0 = -C_4 + \frac{4}{3},$$
$$y'''(0) = 0 = y = -C_3.$$

Окончательно получаем:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\cos x - \frac{1}{3} x \sin x + x^2.$$

4.116. В этом примере рассмотрим, как применяется метод произвольных постоянных Лагранжа. Решим уравнение:

$$y'' + 2y' + y = (2 + x)\ln x + \frac{1 + 2x}{x}.$$

Характеристическое уравнение имеет двойной корень $r = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения записывается так:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

Согласно методу Лагранжа вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_1 = (C_1(x) + C_2(x) \cdot x)e^{-x},$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — неизвестные функции, определяемые из системы: $C_1' + C_2' \cdot x = 0,$

$$-C_1' + C_2' \cdot (1 - x) = (2 + x)e^x \ln x + \frac{1 + 2x}{x} e^x.$$

После сложения этих уравнений и последующего интегрирования обеих частей (постоянную интегрирования можно положить равной нулю) найдем $C_2(x)$:

$$C_2(x) = \int (2 + x)e^x \ln x dx + \int \frac{1 + 2x}{x} e^x dx = (1 + x)e^x \ln x -$$
$$- \int \frac{1 + x}{x} e^x dx + \int \frac{1 + 2x}{x} e^x dx = ((1 + x)\ln x + 1)e^x.$$

Из первого уравнения системы определяем $C_1(x)$:

$$C_1(x) = -\int(2x + x^2)e^x \ln x dx - \int(1 + 2x)e^x dx =$$

$$= -x^2 e^x \ln x + \int x e^x dx - \int(1 + 2x)e^x dx = -(x^2 \ln x + x)e^x.$$

Теперь находим частное решение неоднородного уравнения:

$$y_1 = (C_1(x) + C_2(x) \cdot x)e^{-x} =$$
$$= -x^2 \ln x - x + (x + x^2)\ln x + x = x \ln x.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x \ln x.$$

4.3.3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

В задачах 4.117–4.126 частное решение неоднородного уравнения определить методом подбора по правой части.

4.117. $y'' - y' - 6y = \sin x - 7\cos x - 6x - 1$.

4.118. $y'' + 2y' + y = 4\sin x + x + 2$.

4.119. $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 + \sin x - 2$.

4.120. $y'' - 4y' + 5y = 5x^3 - 2x^2 - 8\cos x - 4$.

4.121. $y'' + 4y = \frac{1}{2}e^{2x} + 4\cos 2x$.

4.122. $y''' - 3y'' - 4y = -\sin x - 7\cos x + 4x$.

4.123. $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 + 6x - 2(\cos x + \sin x) + 6$.

4.124. $y''' + 7y'' + 16y' + 10y = 5e^{-x}$.

4.125. $y^{IV} - y = -4e^{-x} - 8e^{2x}(\cos x + 3\sin x)$.

4.126. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 20e^{2x} + 24\cos 2x$.

В задачах 4.127–4.131 частное решение неоднородного уравнения найти методом вариации произвольных постоянных.

4.127. $y'' + y = x\ln x + \frac{1}{x}$. **4.128.** $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

4.129. $y'' + 2y = 2 - 4x^2 \sin x^2$.

4.130. $y'' - 4y = e^{x^2}(4x^2 - 2)$.

4.131. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.

4.4. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.4.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение 4.1. Система n дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную t и n функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, разрешенная относительно старших производных этих функций $x_1^{(p_1)}(t), x_2^{(p_2)}(t), \ldots, x_n^{(p_n)}(t)$, имеющая вид:

$$\begin{cases} x_1^{(p_1)}(t) = f_1(t, x_1, \ldots, x_1^{(p_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(p_n-1)}) \\ x_2^{(p_2)}(t) = f_2(t, x_1, \ldots, x_1^{(p_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(p_n-1)}) \\ \ldots \\ x_n^{(p_n)}(t) = f_n(t, x_1, \ldots, x_1^{(p_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(p_n-1)}), \end{cases} \tag{4.19}$$

называется канонической, причем число $\sum_{i=1}^{n} p_i$ называется порядком системы.

Каноническая система (4.19) при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, т. е. система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{4.20}$$

называется **нормальной** системой (точка над функцией $x_i(t)$ означает первую производную по переменной t, т. е. $\dot{x}_i(t) = \dfrac{dx_i}{dt}$).

Если правые части системы (4.20) не зависят от переменной t, система (4.20) называется **автономной**. Автономная система имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \ldots, x_n), \\ &i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ определены и непрерывны в некоторой области $\Omega \in R_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемой **фазовым пространством** системы (4.21).

Определение 4.2. Решением системы (4.20) на интервале $t \in [t_1, t_2]$ называется совокупность функций $x_1 = \varphi_1(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, непрерывно дифференцируемых на $[t_1, t_2]$ и обращающих уравнения системы в тождества относительно $t \in [t_1, t_2]$.

Решения $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ автономной системы (4.21) называются **фазовыми траекториями**.

Определение 4.3. Интегралом нормальной системы (4.20) называется функция $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенная и непрерывно дифференцируемая при $t \in [t_1, t_2]$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset \Omega$ и принимающая при любых $t \in [t_1, t_2]$ постоянные значения при подстановке в нее произвольного решения системы, т. е.

$$\Phi(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \equiv C = \text{const}, \; t \in [t_1, t_2].$$

Дифференциальные уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

можно свести к нормальной системе (4.20). Для этого достаточно обозначить $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$, ..., $x^{(n-1)}(t) = x_n(t)$, после этого получим нормальную систему:

$$\begin{aligned} &x(t) = x_1(t), \\ &\dot{x}(t) = x_2(t), \\ &\ldots, \\ &x^{(n-1)}(t) = x_n(t), \\ &x^{(n)}(t) = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.22}$$

И наоборот, системы (4.20), (4.21) могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению n-го порядка, решая которое можно найти и решение исходных систем. В § 4.5 приведены примеры такого подхода к решению систем.

Задача Коши для систем (4.20), (4.21) ставится следующим образом: найти решение $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ систем (4.20), (4.21), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t_0) = x_{10}, \; \ldots, \; \varphi_n(t_0) = x_{n0}, \\ &t_0 \in [t_1, t_2], \; (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Определение 4.4. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $x_1, \ldots, x_n$ в области $\Omega \subset R_n$, если для любой пары точек

$$\left(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\right) \in \Omega, \quad \left(\overline{\overline{x_1}}, \ldots, \overline{\overline{x_n}}\right) \in \Omega$$

выполняется неравенство

$$\left| f\left(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\right) - f\left(\overline{\overline{x_1}}, \ldots, \overline{\overline{x_n}}\right) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i \left| \overline{x_i} - \overline{\overline{x_i}} \right|, \qquad (4.24)$$

где C_i — некоторые положительные постоянные.

Теорема 4.10. Пусть правые части $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нормальной системы (4.20) определены и непрерывны при $t \in [t_1, t_2]$, $(x_1, \ldots, x_n) \subset \Omega \subset R_n$. Если в некоторой окрестности начальных условий $(x_{10}, \ldots, x_{n0}) \subset \Omega$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h] \subset [t_1, t_2]$ функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ удовлетворяют условию Липшица по переменным $x_1, \ldots, x_n$, то на интервале $t_0 - h < t < t_0 + h$ существует единственное решение $\varphi_i(t)$ системы (4.20), удовлетворяющее начальным условиям (4.23):

$$\varphi_i(t_0) = x_{i0}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 4.1. Условие Липшица в теореме 4.10 можно заменить на условие существования непрерывных частных производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t_0)$ $(i = 1, \ldots, n), (j = 1, \ldots, n)$ в некоторой окрестности начальных данных $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$.

Определение 4.5. Общим решением системы (4.20), (4.21) называется совокупность функций $\varphi_i(t, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, зависящих от n произвольных постоянных, которые при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$ обращают уравнения системы (4.20), (4.21) в тождества по $t \in [t_1, t_2]$.

Замечание 4.2. В области значений переменных t, $x_1, \ldots, x_n$, в которой выполнены условия теоремы 4.10, из совокупности функций $\varphi_i(t, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ надлежащим выбором значений постоянных $C_1, \ldots, C_n$ можно получить решение любой задачи Коши.

Существуют два основных метода решения систем (4.20), (4.21). Первый метод, который называется *методом исклю-*

чения, состоит в сведении системы к одному уравнению n-го порядка, которое достигается путем дифференцирования одного из равенств системы (4.20), (4.21) и последующего использования всех уравнений исходной системы. При этом эта процедура повторяется $n-1$ раз. Второй метод заключается в *подборе интегрируемых комбинаций*. Для этого систему (4.20) записывают в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{f_1(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)} \quad (4.25)$$

и используют свойство равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

то при любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ получим

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} \gamma_p a_p}{\sum\limits_{p=1}^{n} \gamma_p b_p} \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (4.26)$$

Иногда за счет удачного подбора величин $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ удается получить k независимых интегралов системы (4.20) (см. определение 4.3):

$$\begin{cases} \Phi_1(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = C_1, \\ \Phi_2(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = C_2, \\ \qquad \ldots, \\ \Phi_k(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = C_k, \\ \qquad k \leqslant n, \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\frac{D(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_k)}{D(x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_k})} \neq 0.$$

Из (4.27) можно выразить функции

$$x_{i_1}(t),\ x_{i_2}(t),\ \ldots,\ x_{i_k}(t)$$

через независимую переменную t и остальные функции системы и подставить их в (4.20). После этого получим новую систему с $n-k$ неизвестными функциями. В частности, при $n = k$ из (4.27) определяют все неизвестные функции.

Определение 4.6. Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ \ldots, \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \tag{4.28}$$

или в матричной форме

$$\dot{\vec{X}}(t) = A(t) \cdot \vec{X}(t), \tag{4.29}$$

где $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

называется **линейной однородной системой** n-го порядка.

В области непрерывности коэффициентов $a_{ij}(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ система (4.28) удовлетворяет условиям теоремы 14.10 существования и единственности решения задачи Коши.

Определение 4.7. Решения

$$\vec{X}_j(t) = (x_{1j}(t),\ x_{2j}(t),\ \ldots,\ x_{nj}(t))^T \quad j = 1,\ \ldots,\ k$$

системы (4.28) называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\sum_{j=1}^{k} C_j \vec{X}_j(t) \equiv 0, \quad t \in [t_1, t_2]$$

при постоянных $C_1, \ldots, C_k$ возможно только при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Определение 4.8. Фундаментальной системой решений уравнений (4.28) называется совокупность произвольных n линейно независимых решений

$$\vec{X}_j(t) = (x_{1j}(t),\ x_{2j}(t),\ \ldots,\ x_{nj}(t))^T, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

С помощью фундаментальной системы решений $X_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ общее решение (4.28) записывается в виде

$$\vec{X}(t) = \sum_{j=1}^{k} C_j X_j(t), \tag{4.30}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Фундаментальной матрицей системы (4.29) называется матрица, столбцы которой равны линейно независимым решениям (4.29), т. е.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Фундаментальная матрица (4.31) удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t). \tag{4.32}$$

Определитель фундаментальной матрицы (4.31) называется определителем Вронского и обозначается $W(t)$, т. е.

$$W(t) = |X(t)|. \tag{4.33}$$

Теорема 4.11. Для того чтобы матрица (4.31) была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского не обращался в нуль:

$$W(t) \neq 0.$$

Фундаментальная матрица $X(t)$, удовлетворяющая условию $X(t_0) = E$, $t_0 \in [t_1, t_2]$, называется **матрициантом**. С помощью матрицианта решение задачи Коши для системы (4.29) записывается следующим образом:

$$\vec{X}(t) = X(t) \cdot \vec{X}_0,$$

где $\vec{X}_0(t) = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})^T$ — начальные условия.

Определение 4.9. Система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{X}}(t) = A(t) \cdot \vec{X}(t) + \vec{f}(t), \tag{4.34}$$

где $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^T$ — заданные непрерывные функции при $t_0 \in [t_1, t_2]$, называется неоднородной.

Теорема 4.12. Общее решение неоднородной системы (4.34) равно сумме общего решения однородной системы (4.29) и любого частного решения неоднородной системы.

Если известна фундаментальная матрица (4.31), то частное решение неоднородной системы можно получить методом вариации произвольного вектора $\vec{C}$. Этот вектор определяется из матричного уравнения

$$X(t)\cdot\dot{\vec{C}}(t)=\vec{f}(t). \tag{4.35}$$

Из (4.35) находим:

$$\dot{\vec{C}}(t)=X^{-1}(t)\cdot\vec{f}(t). \tag{4.36}$$

Затем компоненты вектора $\dot{C}(t)$ определяются интегрированием компонент правой части (4.36) по t.

После нахождения вектора $\vec{C}(t)$ частное решение $\vec{X}_{\text{част}}(t)$ имеет вид

$$\vec{X}_{\text{част}}(t)=X(t)\cdot\vec{C}(t). \tag{4.37}$$

Заметим, что вектор $\vec{C}(t)$ определяется из системы (4.36) с точностью до произвольного постоянного вектора $\vec{C}_0$, который в большинстве задач полагают нулевым.

Если коэффициенты матрицы $A(t)$ в системах (4.32), (4.34) являются постоянными величинами, $a_{ij}(t)=a_{ij}=\text{const}$, то система уравнений (4.32) называется линейной однородной системой с постоянными коэффициентами, а система (4.34) называется неоднородной системой с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\vec{X}}=A\cdot\vec{X}\ \text{(однородная система)}, \tag{4.38}$$

$$\dot{\vec{X}}=A\cdot\vec{X}+f(t)\ \text{(неоднородная система)}, \tag{4.39}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для решения системы (4.38) необходимо найти корни характеристического уравнения

$$D(\lambda)=|A-\lambda E|=0, \tag{4.40}$$

где E — единичная матрица n-го порядка.

Каждому простому корню λ характеристического уравнения (4.40) соответствует решение

$$\dot{X}(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \cdot e^{\lambda t},$$

где постоянный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ является собственным вектором матрицы A, т. е. его компоненты определяются из системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{4.41}$$

Если для корня λ кратности $1 < p \leqslant n$ имеется ровно p линейно независимых собственных векторов $(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})^T$ (компоненты этих векторов определяются из (4.40)), $k = 1, 2, \ldots, p$, то ему соответствуют p линейно независимых решений системы (4.38):

$$\dot{X}_k(t) = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})^T \cdot e^{\lambda t},$$
$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Если для корня λ кратности $1 < p \leqslant n$ имеется только $s < p$ линейно независимых собственных векторов матрицы A $(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})^T$, $k = 1, 2, \ldots, s$ (компоненты этих векторов определяются из системы (4.40)), то решение, соответствующее этому λ, ищется в виде произведения многочлена степени $p - s$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta_{10} + \delta_{11}t + \ldots + \delta_{1\,p-s}t^{p-s})e^{\lambda t} \\ (\delta_{20} + \delta_{21}t + \ldots + \delta_{2\,p-s}t^{p-s})e^{\lambda t} \\ \ldots \\ (\delta_{n0} + \delta_{n1}t + \ldots + \delta_{n\,p-s}t^{p-s})e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Число s можно определить по формуле

$$s = n - \operatorname{rang}(A - \lambda E), \tag{4.43}$$

где λ — рассматриваемый корень характеристического уравнения (4.30).

Для определения постоянных δ_{ij} делают подстановку (4.42) в систему (4.38), приравнивают коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений и решают систему линейных алгебраических уравнений относительно δ_{ij}. Общее решение этой системы должно зависеть от p произвольных постоянных, где p — кратность корня λ характеристического уравнения (4.40).

Общее решение однородной системы (4.38) получается с помощью линейной комбинации решений указанного вида для каждого λ.

Замечание 4.3. Разобранный только что метод поиска общего решения однородной системы приводит к громоздким вычислениям (см. пример 4.140). В связи с этим на практике часто используют другой подход с применением так называемых присоединенных векторов. Суть этого метода рассмотрим на простом примере двукратного корня $\lambda(p = 2)$.

Наряду с собственным вектором

$$\vec{V} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T,$$

определяемым из (4.41), найдем еще **присоединенный** к нему вектор $\vec{V_1}$ из следующей системы:

$$(A - \lambda E)\vec{V_1} = \vec{V}.$$

После этого два частных линейно независимых решения, отвечающих собственному значению λ, имеют вид

$$\vec{X_1} = \vec{V}e^{\lambda t},\quad \vec{X_2} = (\vec{V}t + \vec{V})e^{\lambda t}.$$

В примере 4.144 рассмотрены все необходимые технические подробности этого подхода.

Замечание 4.4. Если среди корней λ характеристического уравнения (4.40) имеются комплексные, то указанный выше способ позволит выразить решение системы (4.38) также через комплексные функции. В том случае, когда матрица A состоит из действительных чисел a_{ij}, решение системы (4.38) также можно выразить через вещественные функции. Для этого нужно взять вещественную и мнимую части комплексного решения и образовать из них два вещественных решения (более подробно см. в § 4.5).

Частное решение неоднородной системы (4.39) всегда можно получить методом вариации произвольного вектора (см. 4.37). Однако в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$, это решение можно искать методом неопределенных коэффициентов. Делается это по тем же правилам, что и для одного линейного уравнения n-го порядка (см. табл. 4.2) с постоянными коэффициентами со следующим изменением.

Если $f_i(t) = P_{m_i}(t) e^{\gamma t}$ ($P_{m_i}(t)$ — многочлен степени m_i), то частное решение системы (4.39) ищется в виде

$$\vec{X}_{\text{част}}(t) = (Q^1_{m+p}(t),\ Q^2_{m+p}(t),\ \ldots,\ Q^n_{m+p}(t))^T \cdot e^{\gamma t},$$

где $Q^i_{m+p}(t)$ — многочлен степени $m + p$ с неопределенными коэффициентами, $m = \max m_i$, $p = 0$, если γ не корень характеристического уравнения (4.40); если γ — корень уравнения (4.40), то p — его кратность.

Неизвестные коэффициенты многочленов $Q^i_{m+p}(t)$ определяются путем подстановки $\vec{X}_{\text{част}}(t)$ в систему (4.39) и сравнения коэффициентов подобных членов (подробнее см. § 4.5).

Заметим в заключение, что системы (4.38) и (4.39) могут быть сведены к одному линейному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами. Именно для системы (4.38) имеет место формула

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.44}$$

где $D\left(\frac{d}{dt}\right)$ — символический многочлен от оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$, совпадающий с $D(\lambda)$ из (4.40).

Для неоднородной системы (4.39) справедлива формула

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\left(\frac{d}{dt}\right) f_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.45}$$

где $M_{ij}\left(\frac{d}{dt}\right)$ — алгебраическое дополнение к элементу d_{ij} определителя $D(\lambda)$.

4.4.2. ПРИМЕРЫ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕШЕНИЯМИ

4.132. Решим нелинейную систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{z}; \\ z' = -\dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Первое уравнение умножаем на z, второе — на y и складываем эти уравнения, получим:

$$(zy)'_x = 0.$$

Отсюда определяем первый интеграл системы:

$$zy = C_1.$$

В первое уравнение исходной системы подставим $z = \dfrac{C_1}{y}$ и проведем интегрирование получающегося дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{C_1} \Rightarrow d\ln|y| = d\left(\frac{x^2}{2C_1}\right) \Rightarrow \ln|y| - \frac{x^2}{2C_1} = C_2 \Rightarrow |y| = e^{C_2} \cdot e^{\frac{x^2}{2C_1}}.$$

Переобозначим постоянную $e^{C_2} \to C_2$. Окончательно с учетом первого интеграла получим решение системы:

$$\begin{cases} y = C_2 e^{\frac{x^2}{2C_1}}; \\ z = \dfrac{C_1}{C_2} e^{-\frac{x^2}{2C_1}}. \end{cases}$$

4.133. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z - x}; \\ z' = y + 1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $z - x$, второе — на y и после этого вычтем из второго уравнения первое, получим:

$$yz' - zy' = y - xy'.$$

Разделим обе части последнего уравнения на y^2 и обнаружим, что обе части полученного уравнения являются полными производными:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{y}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Отсюда найдем первый интеграл системы, из которого выразим z:

$$\frac{z}{y}-\frac{x}{y}=C_1 \Rightarrow z=x+C_1y.$$

Дифференцируем найденное z по x и учитываем второе уравнение исходной системы, получаем:

$$z'=y+1,$$
$$z'=1+C_1y' \Rightarrow C_1y'=y.$$

Отсюда определяем y:

$$\ln|y|=\frac{x}{C_1}+C_2 \Rightarrow y=e^{C_2}\cdot e^{\frac{x}{C_1}}.$$

Переобозначаем постоянную $e^{C_2}\to C_2$, окончательно находим:

$$y=C_2e^{\frac{x}{C_1}};$$
$$z=x+C_1C_2e^{-\frac{x}{C_1}}.$$

4.134. Решим еще одну систему:

$$\begin{cases} y'=\dfrac{z}{x}; \\ z'=\dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}. \end{cases}$$

Прежде всего, сделаем замену: $y-1=Y$, после этого получим:

$$\begin{cases} Y'=\dfrac{z}{x}; \\ z'=\dfrac{z}{x}\left(1+2\dfrac{z}{Y}\right). \end{cases}$$

С учетом первого уравнения последней системы из второго найдем:

$$\frac{z'}{z}=\frac{1}{x}+2\frac{Y'}{Y}.$$

Отсюда путем интегрирования определяем первый интеграл:

$$\frac{z}{xY^2} = C_1.$$

Теперь используем первое уравнение преобразованной системы и найденный интеграл, получим:

$$Y' = C_1 Y^2.$$

Интегрируем это уравнение с разделяющимися переменными и определяем его общее решение:

$$Y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Возвращаемся к переменной $y = Y + 1$, окончательно получаем:

$$y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2};$$

$$z = C_1 x Y^2 = \frac{C_1 x}{(C_1 x + C_2)^2}.$$

4.135. В рассматриваемом ниже примере исключаем переменную y и сводим систему к одному уравнению второго порядка относительно z:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - z^2 + 1}{2z}; \\ z' = z + y. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим:

$$y = z' - z;$$
$$y' = z'' - z'.$$

Подставим это в первое уравнение и получим искомое исключение y:

$$2z(z'' - z') = (z' - z)^2 - z^2 + 1 \Rightarrow 2zz'' = (z')^2 + 1.$$

Введем новую функцию $\varphi(z) = z'$, тогда

$$z'' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \varphi \frac{d\varphi}{dz}.$$

Относительно функции $\varphi(z)$ получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$2z\cdot\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dz}=1+\varphi^2,$$

интегрируя которое, получаем

$$\varphi=\pm\sqrt{C_1z-1}.$$

Теперь, учитывая, что $\varphi = z'$, определим z также из уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx}=\pm\sqrt{C_1z-1}\Rightarrow z=\frac{1}{C_1}+\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2.$$

И далее найдем y:

$$y=z'-z=\frac{C_1}{2}(x+C_2)-\frac{1}{C_1}-\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2.$$

4.136. Решим систему, записанную в симметричной форме:

$$\frac{dx}{2y-z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

С использованием свойства равных пропорций (4.26) получим следствие:

$$\frac{dx}{2y-z}=\frac{d(2y-z)}{2y-z}.$$

Отсюда определяем первый интеграл:

$$2y-z-x=C_1.$$

Из второго уравнения системы $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ находим:

$$z=C_2y.$$

Найдены два первых независимых интеграла этой системы. Из них можно, например, выразить z и x как функции y и тем самым получить решения в явном виде:

$$x=(2-C_2)y-C_1;$$
$$z=C_2y.$$

4.137. Рассмотрим еще одну систему нелинейных дифференциальных уравнений, записанную в симметричной форме:

$$\frac{dx}{x(z-y)}=\frac{dy}{y(y-x)}=\frac{dz}{y^2-xz}.$$

Из свойств равных пропорций (4.26) найдем

$$\frac{d(x-y)}{xz-xy-y^2+yx}=\frac{dz}{y^2-xz}\Rightarrow d(x-y)=dz\Rightarrow y-x-z=C_1.$$

Используем этот интеграл и первое уравнение исходной системы, получим в качестве следствия дифференциальное уравнение:

$$-\frac{dx}{(x+C_1)x}=\frac{dy}{y(y-x)}$$

или

$$y'=-\frac{y^2-yx}{x(x+C_1)}=\frac{y}{x+C_1}-\frac{y^2}{x(x+C_1)}.$$

Сделаем замену $y=\psi(x)(x+C_1)$, тогда

$$\frac{d\psi}{dx}=-\frac{\psi^2}{x}.$$

Интегрируем это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\psi}{\psi^2}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow-\frac{1}{\psi}+\ln|x|=C_2.$$

Тем самым найден еще один интеграл заданной системы

$$\ln|x|-\frac{y-z}{y}=C_2.$$

4.138. Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\dot{x}=5x-6y;\\ \dot{y}=3x-y,\end{cases}$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение (4.40):

$$D(\lambda)=|A-\lambda E|=\left|\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}5-\lambda & -6\\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+13.$$

Отсюда найдем комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Собственные векторы, отвечающие этим корням, также будут комплексно сопряжены. Найдем один из них для $\lambda_1 = 2 + 3i \to \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} (1-i)\alpha_1 - 2\beta_1 = 0; \\ \alpha_1 - (1+i)\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Можно положить $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$. Для собственного значения $\lambda_2 = 2 - 3i$ соответствующий собственный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Два линейно независимых комплексно значащих решения заданной системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{(2+3i)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{(2+3i)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить вещественное решение, достаточно у одного из указанных решений выделить действительную и мнимую части, т. е.

$$\operatorname{Re}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\left(e^{(2+3i)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2e^{2t}\cos 3t \\ e^{2t}(\sin 3t + \cos 3t) \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \operatorname{Im}\left(e^{(2+3i)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2e^{2t}\sin 3t \\ e^{2t}(\sin 3t - \cos 3t) \end{pmatrix}.$$

Отсюда общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \sin 3t + \cos 3t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - \cos 3t \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решим эту же задачу методом исключения одной из функций (например, исключим y).

Для этого в соответствии с (4.44) в характеристическом уравнении заменяем $\lambda \to \dfrac{d}{dt}$ и получаем уравнение второго порядка для функции $x(t)$:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 4\frac{d}{dt} + 13\right)x(t) = 0$$

или

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 13x = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x(t) = e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t).$$

Чтобы найти $y(t)$, заметим, что согласно первому уравнению исходной системы

$$6y = \dot{x} - 5x = 2e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) +$$
$$+ e^{2t}(3C_2 \cos 3t - 3C_1 \sin 3t) - 5e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) =$$
$$= e^{2t}(C_1(3\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(3\cos 3t - 3\sin 3t)).$$

Отсюда

$$y = e^{2t}\left(\frac{C_1}{2}(\cos 3t + \sin 3t) + \frac{C_2}{2}(\cos 3t - \sin 3t)\right),$$

что совпадает с предыдущим решением после переобозначения произвольных постоянных $\frac{C_1}{2} \to C_1$, $\frac{C_2}{2} \to C_2$.

4.139. Рассмотрим систему с постоянными коэффициентами с тремя неизвестными функциями:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 2z; \\ \dot{y} = x + 6y + 2z; \\ \dot{z} = -5x - 7y - 3z. \end{cases}$$

Начинаем, как всегда, с характеристического уравнения (4.40):

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 6-\lambda & 2 \\ -5 & -7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0.$$

Корни $D(\lambda)$ определяем подбором, как делители свободного члена, отсюда

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Все собственные значения (корни $D(\lambda)$) простые. Определяем собственные векторы $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^T$, $i = 1, 2, 3$.

Если $\lambda_1 = 1$, то

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 = 0; \\ \alpha_1 + 5\beta_1 + 2\gamma_1 = 0; \\ -5\alpha_1 - 7\beta_1 - 4\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Можно считать, что $\alpha_1 = \beta_1 = -1$, $\gamma_1 = 3$.

Частное решение, отвечающее этому собственному значению:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_2 = 3$, тогда собственный вектор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$ определяем из системы

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 = 0; \\ \alpha_2 + 3\beta_2 + 2\gamma_2 = 0; \\ -5\alpha_2 - 7\beta_2 - 6\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_2 = \beta_2 = -1$, $\gamma_2 = 2$ и частное решение, отвечающее $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, при $\lambda_3 = 4$ получим

$$\begin{cases} \alpha_3 + 2\beta_3 + 2\gamma_3 = 0; \\ \alpha_3 + 2\beta_3 + 2\gamma_3 = 0; \\ -5\alpha_3 - 7\beta_3 - 7\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 1$, $\gamma_3 = -1$ и частное решение, отвечающее $\lambda_3 = 4$, равно

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на основании (4.30) общее решение этой системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.140. Рассмотрим еще одну однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y; \\ \dot{y} = 3x - z; \\ \dot{z} = 4y - 2z. \end{cases}$$

Характеристический многочлен $D(\lambda)$ в данном случае:

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & -\lambda & -1 \\ 0 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda+1)^2.$$

Соответствующие собственные значения $\lambda_1 = -2$ (простое), $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (двукратное).

Собственный вектор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$, отвечающий простому собственному значению $\lambda_1 = -2$, найдем из системы:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\begin{cases} \beta_1 = 0; \\ 3\alpha_1 + 2\beta_1 - \gamma_1 = 0; \\ 4\beta_1 = 0, \end{cases}$$

следовательно

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \\ \beta_1 &= 0, \\ \gamma_1 &= 3. \end{aligned}$$

Частное решение, соответствующее $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь кратный корень $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Прежде всего найдем $\operatorname{Rang}(A - (-1)E)$:

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

В соответствии с (4.43) $s = 3 - \operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 1$ и $p - s = 1$, поэтому согласно (4.42) решения, соответствующие кратному собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, нужно искать в виде:

$$x = (\delta_{11} + \delta_{12}t)e^{-t},$$
$$y = (\delta_{21} + \delta_{22}t)e^{-t},$$
$$z = (\delta_{31} + \delta_{32}t)e^{-t}.$$

Неизвестные $\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{32}$ определяем после подстановки предполагаемого решения в исходную систему и последующим сравнением коэффициентов при одинаковых степенях t, имеем:

$$\begin{cases} \delta_{11} + \delta_{12} - \delta_{21} = 0; \\ \delta_{12} - \delta_{22} = 0; \\ -3\delta_{12} - \delta_{22} + \delta_{32} = 0; \\ -3\delta_{11} - \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{31} = 0; \\ -4\delta_{21} + \delta_{31} + \delta_{32} = 0; \\ -4\delta_{22} + \delta_{32} = 0. \end{cases}$$

Применим к этой системе метод Гаусса (см. часть I пособия).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \boxed{4}+3\boxed{1} \\ \\ \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \boxed{3}+3\boxed{2} \\ 4-3\boxed{2} \\ \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{3}+3\boxed{2} \\ 4-3\boxed{2} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(удалена} \\ \text{3 строка)} \\ \boxed{5}-\boxed{4} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{31} & \delta_{32} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переменные δ_{31}, δ_{32} — свободные, а переменные δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22} — базисные.

Положим сначала $\delta_{32} = 0$ и $\delta_{31} = 4$ (чтобы получить целые значения для базисных переменных). Обратным ходом метода Гаусса последовательно определяем: $\delta_{22} = 0$, $\delta_{21} = 1$, $\delta_{12} = 0$, $\delta_{11} = 0$. Тем самым найдено второе частное решение исходной системы

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\delta_{31} = 0$ и $\delta_{32} = 4$, тогда, применяя обратный ход метода Гаусса, определим: $\delta_{22} = 1$, $\delta_{21} = 1$, $\delta_{12} = 1$, $\delta_{11} = 0$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Общее решение поставленной задачи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

4.141. Посмотрим, как ищется решение системы в случае комплексных собственных значений. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((\lambda-1)^2 + 1),$$

отсюда

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = 1 + i,$$
$$\lambda_3 = 1 - i.$$

При $\lambda_1 = 0$ собственный вектор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ определим из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0; \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 0; \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 0, \end{cases}$$

следовательно, $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, \gamma_1 = -1$.

Частное решение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 1 + i$ собственный вектор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$ будет иметь комплексные координаты, которые определим из системы

$$\begin{cases} -i\alpha_2 - \beta_2 = 0; \\ \alpha_2 - (1+i)\beta_2 + \gamma_2 = 0; \\ \alpha_2 - i\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

отсюда $\alpha_2 = -1, \beta_2 = i, \gamma_2 = i$.

При $\lambda_3 = 1 - i = \bar{\lambda}_2$ координаты $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$ будут комплексно сопряжены с координатами $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$, т. е. $\alpha_3 = -1$, $\beta_3 = -i, \gamma_3 = -i$.

Комплексно-сопряженным собственным значениям $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ соответствуют два комплексно-сопряженных частных решения исходной системы:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix} = e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить из этих решений два вещественных, достаточно у одного из них выделить вещественную и мнимую части:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

4.142. В рассматриваемой ниже неоднородной системе для поиска частного решения применяется метод вариации постоянных:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \dfrac{1}{1+e^t}; \\ \dot{y} = -2x + 4y - \dfrac{1}{1+e^t}. \end{cases}$$

Сначала определим два частных линейно независимых решения однородной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y; \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$$

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

При $\lambda_1 = 0$ собственный вектор $(\alpha_1, \beta_1)^T$ определим из системы

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 4\beta_1 = 0; \\ -2\alpha_1 + 4\beta_1 = 0, \end{cases}$$

отсюда $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$.

При $\lambda_2 = 2$ также $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Таким образом, общее решение однородной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно методу вариации постоянных ищем частное решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{част}} \\ y_{\text{част}} \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

неизвестные функции $C_1(t)$, $C_2(t)$ определим из системы

$$\dot{C}_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\dot{C}_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+e^t}\\[2mm] -\dfrac{1}{1+e^t}\end{pmatrix}.$$

Или в развернутом виде

$$\begin{cases}2\dot{C}_1+e^{2t}\dot{C}_2=\dfrac{1}{1+e^t};\\[2mm] \dot{C}_1+e^{2t}\dot{C}_2=-\dfrac{1}{1+e^t}.\end{cases}$$

Далее последовательно определяем:

$$\dot{C}_1=\frac{2}{1+e^t},$$

$$C_1=\int\frac{2dt}{1+e^t}=2\int\frac{e^{-t}dt}{1+e^{-t}}=-2\int\frac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}}=-2\ln(1+e^{-t}),$$

$$\dot{C}_2=-\frac{3e^{-2t}}{1+e^t},$$

$$C_2=-3\int\frac{e^{-2t}dt}{1+e^t}=-3\int\frac{e^{-t}dt}{1+e^{-t}}=3\int\frac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}}=3\ln(1+e^{-t})$$

(постоянные интегрирования приняты равными нулю).

Искомое частное решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix}x_{\text{част}}\\y_{\text{част}}\end{pmatrix}=-2\ln(1+e^{-t})\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+3\ln(1+e^{-t})e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\ln(1+e^{-t})\\ \ln(1+e^{-t})\end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\ln(1+e^{-t})\\ \ln(1+e^{-t})\end{pmatrix}.$$

4.143. В некоторых случаях при решении систем применяют метод исключения неизвестных функций.

Для иллюстрации этого приема решим систему

$$\begin{cases}\dot{x}=x-2y-z-2e^t;\\ \dot{y}=-x+y+z-2e^t;\\ \dot{z}=x-z-e^t.\end{cases}$$

Характеристический многочлен $D(\lambda)$ данной системы равен:

$$D(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda..$$

Найдем также алгебраические дополнения A_{11}, A_{21}, A_{31} матрицы $A-\lambda E$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1;$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=-2\lambda-2;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=-1-\lambda..$$

В соответствии с формулами (4.45) сделаем замену $\lambda\to\frac{d}{dt}$ в $D(\lambda), A_{11}, A_{21}, A_{31}$ и исключим функции y и z:

$$\left(-\frac{d^3}{dt^3}+\frac{d^2}{dt^2}+2\frac{d}{dt}\right)x=\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)2e^t+\left(2\frac{d}{dt}+2\right)2e^t-\left(\frac{d}{dt}+1\right)e^t,$$

отсюда получим уравнение третьего порядка для функции x:

$$-\dddot{x}+\ddot{x}+2\dot{x}=6e^t \text{ или } \ddot{x}-\dot{x}-2x=-6e^t+C_3.$$

Это уравнение второго порядка решим обычным образом (см. § 4.3.2). Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

имеет корни $\lambda_1=-1, \lambda_2=2$.

Частное решение неоднородного уравнения $x_{\text{част}}$ будем искать в виде

$$x_{\text{част}}=Ae^t+B.$$

Постоянные A, B определим после подстановки в уравнение для x

$$A=3,$$
$$B=-C_3.$$

Следовательно,

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 3e^t - C_3.$$

Возвращаясь к исходной системе, из третьего ее уравнения определим функцию z. Проведем соответствующие вычисления:

$$\dot{z} + z = x - e^t = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2e^t - C_3.$$

Умножаем обе части этого уравнения на e^t и интегрируем его после этого:

$$\begin{cases} (e^t z)'_t = C_1 + C_2 e^{3t} + 2e^{2t} - C_3 e^t; \\ e^t z = C_1 t + \dfrac{C_2}{3} e^{3t} + e^{2t} - C_3 e^t + C_4; \\ z = C_1 t e^{-t} + \dfrac{C_2}{3} e^{2t} + e^t - C_3 + C_4 e^{-t}. \end{cases}$$

После сложения первого и второго уравнений исходной системы получим

$$\dot{x} + \dot{y} + y = 0.$$

Тем же приемом, который только что применялся для нахождения z, найдем y из уравнения

$$\dot{y} + y = -\dot{x}.$$

Получим

$$y = C_1 t e^{-t} - \frac{2}{3} C_2 e^{2t} - \frac{3}{2} e^t + C_5 e^{-t}.$$

Подстановка найденных функций x, y, z в исходную систему показывает, что $C_1 = 0$, $C_5 = e$, $C_4 = -2e$ и C, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем $C_2 \to 3C_2$, $C \to C_1$, $C_3 \to -C_3$ и получим окончательно

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.144. В случае кратных собственных значений при поиске частных решений однородной системы методом неопределенных коэффициентов возникают некоторые технические трудности (см. пример 4.140). В замечании 4.3 § 4.4 указан другой подход для определения частных решений.

Рассмотрим этот прием, более удобный с практической точки зрения, на следующем примере:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - z; \\ \dot{y} = -6x - 6y + z; \\ \dot{z} = -4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

В данном случае

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ -6 & -6-\lambda & 1 \\ -4 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^3.$$

Собственное значение -2 трехкратно:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2.$$

Далее,

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -6 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$s = 3 - \operatorname{rang}(A - \lambda E) = 1,$$

$$p - s = 3 - 1 = 2.$$

Поэтому согласно (4.42) решения, соответствующие корню $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$, нужно искать в виде:

$$\begin{cases} x = (\delta_{11} + \delta_{12}t + \delta_{13}t^2)e^{-2t}; \\ y = (\delta_{21} + \delta_{22}t + \delta_{23}t^2)e^{-2t}; \\ z = (\delta_{31} + \delta_{32}t + \delta_{33}t^2)e^{-2t}. \end{cases}$$

Последующие расчеты приведут к вычислениям над матрицами девятого порядка. Поэтому в таких случаях удобно использовать собственные и присоединенные векторы, упомянутые в замечании 4.3 § 4.4.

Прежде всего для собственного значения $\lambda_1 = -2$ находим соответствующий собственный вектор из системы

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 3\beta_1 - \gamma_1 = 0; \\ \alpha_1 + 4\beta_1 + \gamma_1 = 0; \\ -4\alpha_1 - 2\beta_1 = 0, \end{cases}$$

отсюда $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 2$.

Затем находим присоединенные к нему векторы $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$ и $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$ из уравнений

$$(A - (-2)E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$(A - (-2)E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Проведем вычисления:

$$\begin{cases} 4\alpha_2 + 3\beta_2 - \gamma_2 = \alpha_1 = -1; \\ -6\alpha_2 - 4\beta_2 + \gamma_2 = \beta_1 = 2; \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = \gamma_1 = 2, \end{cases}$$

отсюда $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 3$, $\gamma_2 = 2$.

$$\begin{cases} 4\alpha_3 + 3\beta_3 - \gamma_3 = \alpha_2 = -2; \\ -6\alpha_3 - 4\beta_3 + \gamma_3 = \beta_2 = 3; \\ -4\alpha_3 - 2\beta_3 = \gamma_2 = 2, \end{cases}$$

отсюда $\alpha_3 = -1$, $\beta_3 = 1$, $\gamma_3 = 1$.

После этого напишем частные линейно независимые решения исходной системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}\right) = e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}\right) = e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Общее решение запишем с использованием фундаментальной матрицы $X(t)$ (4.31):

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

4.145. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + \cos t; \\ \dot{y} = 5x - 4y + 3z + \sin t; \\ \dot{z} = 4x - 4y + 3z + 2\sin t - 2\cos t, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = z(0) = 3.$$

Решим характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -4-\lambda & 3 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(1 - \lambda^2) = 0,$$

где $\lambda_1 = -1$ (простой корень).

Собственный вектор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ определим из системы

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0; \\ 5\alpha_1 - 3\beta_1 + 3\gamma_1 = 0; \\ 4\alpha_1 - 4\beta_1 + 4\gamma_1 = 0, \end{cases}$$

т. е. $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \gamma_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_2 = 1$ (двукратный корень).

Найдем собственный вектор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$ и присоединенный к нему вектор $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$ из систем:

$$\begin{cases} \alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 = 0; \\ 5\alpha_2 - 5\beta_2 + 3\gamma_2 = 0; \\ 4\alpha_2 - 4\beta_2 + 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

отсюда $\alpha_2 = \beta_2 = 1, \gamma_2 = 0$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 = \alpha_2 = 1; \\ 5\alpha_3 - 5\beta_3 + 3\gamma_3 = \beta_2 = 1; \\ 4\alpha_3 - 4\beta_3 + 2\gamma_3 = \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \gamma_3 = 2$.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Чтобы найти частное решение неоднородной системы, используем метод подбора по правой части.

В данном случае

$$\begin{pmatrix} x_{\text{част}} \\ y_{\text{част}} \\ z_{\text{част}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \sin t + b_1 \cos t \\ a_2 \sin t + b_2 \cos t \\ a_3 \sin t + b_3 \cos t \end{pmatrix}.$$

Проводим подстановку предполагаемого решения в исходную систему и сравниваем коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$. Получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_1 = 2b_1 - b_2 + b_3 + 1; \\ -b_1 = 2a_1 - a_2 + a_3; \\ a_2 = 5b_1 - 4b_2 + 3b_3; \\ -b_2 = 5a_1 - 4a_2 + 3a_3 + 1; \\ a_3 = -4b_1 - 4b_2 + 3b_3 - 2; \\ -b_3 = 4a_1 - 4a_2 + 3a_3 + 2. \end{cases}$$

Напишем расширенную матрицу этой системы (см. часть I) и применим к ней серию элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{2}+2\boxed{1} \\ \boxed{4}+5\boxed{1} \\ \boxed{6}+4\boxed{1} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 4 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 4 & 4 & -3 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim$$

Меняем местами 2 и 3 столбцы, затем $\boxed{3}-\boxed{1}$, $\boxed{4}-2\boxed{2}$, $\boxed{6}+2\boxed{5}$ $\sim$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 12 & -1 & -11 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{4}-2\boxed{2} \\ \boxed{6}-4\boxed{2} \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 20 & 4 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

Меняем местами 3 и 5 столбцы, $\boxed{4}-2\boxed{2}$, $\boxed{6}-4\boxed{2}$ $\sim$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 10 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 20 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{l} \boxed{4}-\boxed{3} \\ \boxed{5}-\boxed{3} \\ \boxed{6}-3\boxed{3} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & b_2 & b_1 & b_3 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 20 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3, 4 и 5 строке последней матрицы отвечает система (с учетом сделанных перестановок столбцов)

$$\begin{cases} -6b_2 + 10b_1 + 4b_3 = 0; \\ 2b_2 + 4b_1 - 2b_3 = 0; \\ 2b_2 + 20b_1 = 0. \end{cases}$$

Поскольку эта однородная система имеет ненулевой определитель, получаем: $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тогда a_1, a_2, a_3 определяем из системы, соответствующей 1, 2 и 3 строкам последней матрицы, т. е.

$$\begin{cases} a_1 = 1; \\ a_2 - a_3 = 2; \\ a_3 = -2, \end{cases}$$

отсюда $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -2$.

Таким образом, частное решение:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{част}} \\ y_{\text{част}} \\ z_{\text{част}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ -2\sin t \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ -2\sin t \end{pmatrix}.$$

Определяем C_1, C_2, C_3 из условий Коши при $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

отсюда $C_1 = C_2 = C_3 = 1$.

4.4.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.146. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{(y+z)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{(y+z)^2}. \end{cases}$ **4.147.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - yz, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + yz. \end{cases}$

4.148. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y^2+z^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{y^2+z^2}. \end{cases}$

4.149. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-yz}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{y-yz}. \end{cases}$

4.150. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{x}. \end{cases}$

4.151. $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = uv^2 - u^2, \\ \dfrac{dv}{dx} = v^2, \\ \dfrac{dw}{dx} = w^2 + 2vw. \end{cases}$

4.152. $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -u^2, \\ \dfrac{dv}{dx} = uv - w^2, \\ \dfrac{dw}{dx} = uw. \end{cases}$

4.153. $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = u(u+v), \\ \dfrac{dv}{dx} = -v(u+v), \\ \dfrac{dw}{dx} = -w(u-v). \end{cases}$

4.154. $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = uv, \\ \dfrac{dv}{dx} = v, \\ \dfrac{dw}{dx} = ue^{-v} + w. \end{cases}$

4.155. $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = u - 3u^2w^2, \\ \dfrac{dv}{dx} = 3u^2v^2w, \\ \dfrac{dw}{dx} = w. \end{cases}$

4.156. $\begin{cases} \dot{x} = 9x + 8y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$

4.157. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 6y, \\ \dot{y} = -3x - 2y. \end{cases}$

4.158. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$

4.159. $\begin{cases} \dot{x} = -7x - 9y, \\ \dot{y} = 4x + 5y. \end{cases}$

4.160. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 9y, \\ \dot{y} = 4x - 5y. \end{cases}$

4.161. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + z, \\ \dot{y} = -2x - 5y - 2z, \\ \dot{z} = 2x + 10y + 4z. \end{cases}$

4.162. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + 8y - 2z, \\ \dot{z} = 4x + 8y - 3z. \end{cases}$

4.163. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x + 2y + z, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$

4.164. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + z, \\ \dot{y} = 9x - 5y - 4z, \\ \dot{z} = -10x + 10y + 9z. \end{cases}$

4.165. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 16y + 4z, \\ \dot{y} = -x - 2y - z, \\ \dot{z} = -x - 4y + 2z. \end{cases}$

4.166. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 4y, \\ \dot{y} = -8x + 4y + \operatorname{tg} 4t. \end{cases}$

4.167. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y + \dfrac{e^{-t}}{t}, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

4.168. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 8y + \sqrt{t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

4.169. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 2t \ln t, \\ \dot{y} = -2x - 8y. \end{cases}$

4.170. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 20y - 4\operatorname{ctg} 4t, \\ \dot{y} = -4x - 8y. \end{cases}$

4.171. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + te^{t}, \\ \dot{y} = x + 3y + e^{t}, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

4.172. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y, \\ \dot{y} = -2x - 5y + 24e^{t}, \\ x(0) = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

4.173. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z + 8, \\ \dot{z} = x + z, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

4.174. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 1 + e^{-t}, \\ \dot{y} = x + 2y - z + 1 - e^{-t}, \\ \dot{z} = -2x + 2y - z + 1, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

4.175. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = 2y + z + e^{2t}, \\ \dot{z} = 4x + 2z - 4e^{t}, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = -1. \end{cases}$

4.5. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.5.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Не ограничивая общности, изложим теорию устойчивости на примере системы ОДУ второго порядка.

Пусть для системы ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = F_1(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = F_2(t, \tilde{x}, \tilde{y}) \end{cases} \tag{4.46}$$

находятся два решения $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\}$ и $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}$, удовлетворяющие соответственно двум парам близких начальных условий:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t_0) = \widetilde{x_0}, \\ \tilde{y}(t_0) = \widetilde{y_0} \end{cases} \tag{4.47}$$

и

$$\begin{cases} \bar{x}(t_0) = \overline{x_0}, \\ \bar{y}(t_0) = \overline{y_0}. \end{cases} \tag{4.48}$$

Определение 4.10. Решения $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\}$, удовлетворяющие уравнениям (4.46) и начальным условиям (4.47), называются устойчивыми по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} |\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon, \\ |\tilde{y}(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon, \end{cases} \tag{4.49}$$

если начальные данные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} |\tilde{x}(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta, \\ |\tilde{y}(t_0) - \bar{y}(t_0)| < \delta. \end{cases} \tag{4.50}$$

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $\tilde{x}(t)$ или $\tilde{y}(t)$ соответствующее неравенство из (4.49) не выполняется при выполнении неравенств (4.50), то это решение называется неустойчивым по Ляпунову.

Определение 4.11. Если кроме одновременного выполнения неравенств (4.49) и (4.50) выполняется равенство

$$\lim_{t \to \infty} |\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| = 0 \quad (\text{или } \lim_{t \to \infty} |\tilde{y}(t) - \bar{y}(t)| = 0), \qquad (4.51)$$

то решение $\tilde{x}(t)\cdot(\tilde{y}(t))$ называется асимптотически устойчивым.

Если ввести функции

$$x(t) = \tilde{x}(t) - \bar{x}(t) \text{ и } y(t) = \tilde{y}(t) - \bar{y}(t),$$

то система (4.46) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{d\bar{x}}{dt} + F_1(t,\ x + \bar{x},\ y + \bar{y}) \equiv f_1(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{d\bar{y}}{dt} + F_2(t,\ x + \bar{x},\ y + \bar{y}) \equiv f_2(t, x, y). \end{cases} \qquad (4.52)$$

Исследование на устойчивость некоторого решения системы (4.52) может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения $\{x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\}$, которое назовем **точкой покоя.**

Определение 4.12. Точка покоя $x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0$ называется устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $t \geqslant t_0$ будет выполняться неравенство

$$\begin{cases} |x(t)| < \varepsilon, \\ |y(t)| < \varepsilon, \end{cases} \qquad (4.53)$$

если начальные данные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} |x(t_0)| < \delta, \\ |y(t_0)| < \delta. \end{cases} \qquad (4.54)$$

Определение 4.13. Расширенным фазовым пространством называется трехмерное пространство $\{(t, x, y)\} \in \mathbb{R}^3$. Фазовым пространством называется двумерное пространство $\{(x, y)\} \in \mathbb{R}^2$.

Если исключить из решения $\{x(t), y(t)\}$ параметр t, то получим проекцию $\Phi(x, y) = \text{const}$ интегральной кривой $\{x(t), y(t)\}$ на фазовое пространство $\{(x, y)\} \in \mathbb{R}^2$. Эта проекция называется **фазовой траекторией.**

Пусть система (4.52) представима в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + \varphi_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + \varphi_2(x, y), \end{cases} \tag{4.55}$$

причем при $x \to 0$, $y \to 0$ функции $\varphi_i(x, y)$, $(i = 1, 2)$ стремятся к нулю быстрее, чем стремятся к нулю x и y. Тогда исследование устойчивости точки покоя системы (4.55) можно провести **по первому приближению**, исследуя линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{4.56}$$

Определение 4.14. Назовем

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.57}$$

характеристическим уравнением для системы (4.56).

Определение 4.14а. Линейная система (4.56) называется простой, если характеристическое уравнение (4.57) не имеет нулевых решений. Если хотя бы одно решение уравнения (4.57) нулевое, то система (4.56) называется непростой.

Раскрывая знак определителя, получим из уравнения (4.57) следующее квадратное уравнение для λ:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{4.58}$$

В зависимости от решений характеристического уравнения получаются следующие результаты.

1. Корни λ_1 и λ_2 действительные и не равные друг другу:

а) $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$. Устойчивый узел (рис. 4.1).

Если один из корней равен нулю, а другой отрицателен, то решение устойчиво.

b) $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$. Неустойчивый узел (рис. 4.2).

c) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Неустойчивое седло (рис. 4.3).

2. Корни λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

а) $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$. Устойчивый фокус (рис. 4.4).

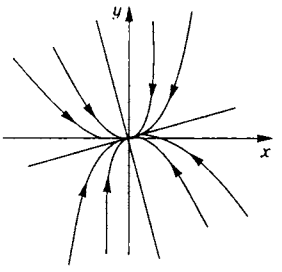

Рис. 4.1

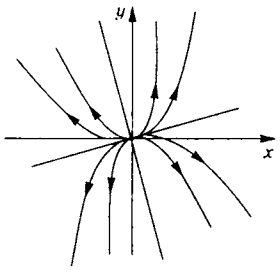

Рис. 4.2

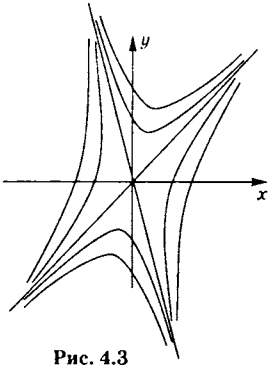

Рис. 4.3

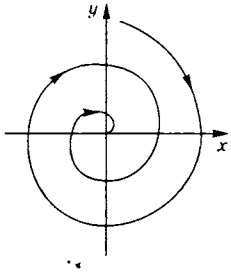

Рис. 4.4

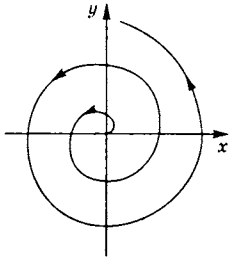

Рис. 4.5

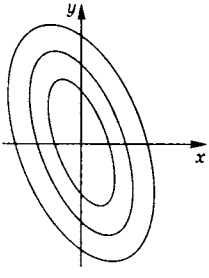

Рис. 4.6

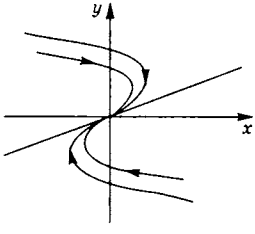

Рис. 4.7

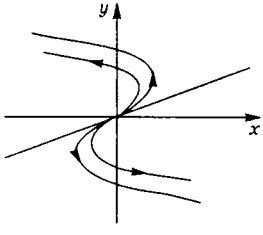

Рис. 4.8

b) $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$. Неустойчивый фокус (рис. 4.5).

c) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Точка покоя (центр) устойчива (рис. 4.6).

3. Корни λ_1 и λ_2 кратные:

a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Устойчивый вырожденный узел (рис. 4.7).

b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Неустойчивый вырожденный узел (рис. 4.8).

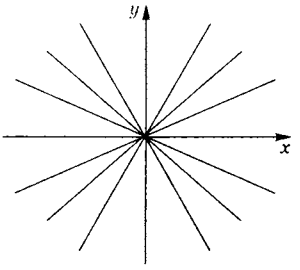

Рис. 4.9

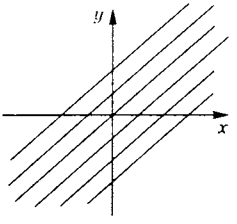

Рис. 4.10

c) Для распадающейся системы $\dot{x} = \lambda x$, $\dot{y} = \lambda x$ получается дикритический узел (рис. 4.9).

d) Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, то решения на фазовой плоскости изображаются параллельными прямыми (рис. 4.10).

4.5.1.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы ОДУ.

4.176. $\dfrac{dx}{dt} = -2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 0 \\ 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные, не равные друг другу и отрицательные:

$$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -2 < 0$$

(случай 1а) — устойчивый узел.

4.177. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 4y.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -2 \\ 1 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные, не равные друг другу и положительные:

$$\lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = 3 > 0$$

(случай 1b) — неустойчивый узел.

4.178. $\frac{dx}{dt} = -2x, \quad \frac{dy}{dt} = y.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 0 \\ 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1) = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные и имеют разные знаки:

$$\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -2 < 0$$

(случай 1c) — неустойчивое седло.

4.179. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x - 2y.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (0-\lambda) & 1 \\ -4 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, действительная часть отрицательна, мнимая — отлична от нуля:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = -\frac{1}{2} < 0, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$ (случай 2a).

Точка покоя — устойчивый фокус.

4.180. $\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, действительная часть положительна, мнимая — отлична от нуля:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$ (случай 2b: $\alpha = 1 > 0, \beta = 1 \neq 0$).

Точка покоя — неустойчивый фокус.

4.181. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (0-\lambda) & 1 \\ -4 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, действительная часть равна нулю, мнимая — отлична от нуля, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ (случай 2c: $\alpha = 0$, $\beta = 2 \neq 0$). Точка покоя — центр. Интегральные кривые представляют собой на фазовой плоскости семейство эллипсов:

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{4C^2} = 1,$$

где C — произвольная постоянная.

4.182. $\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$

Р е ш е н и е. Система распадающаяся. Устойчивый дикритический узел (случай 3c).

4.183. $\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y.$

Р е ш е н и е. Система распадающаяся. Устойчивый дикритический узел (случай 3c).

4.184. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (0-\lambda) & 1 \\ 0 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные, совпадающие и равны нулю: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Все точки оси OX являются точками покоя (случай 3d).

4.185. $\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 0 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Все точки оси OY являются точками покоя (случай 3d).

4.5.1.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

Исследовать на устойчивость.

4.186. $\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 3y.$

4.187. $\frac{dx}{dt} = 4x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$

4.188. $\frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 4y.$

4.189. $\frac{dx}{dt} = -x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$

4.190. $\frac{dx}{dt} = 4x - 22y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$

4.191. $\frac{dx}{dt} = -4x - 22y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$

4.192. $\frac{dx}{dt} = -2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x.$ **4.193.** $\frac{dx}{dt} = 2x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y.$

4.194. $\frac{dx}{dt} = -3x, \quad \frac{dy}{dt} = -3y.$ **4.195.** $\frac{dx}{dt} = 5y, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$

4.196. $\frac{dx}{dt} = 4x, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$

4.197. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x - 16y.$

4.198. $\frac{dx}{dt} = -x - 9y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$

4.199. $\frac{dx}{dt} = 7x, \quad \frac{dy}{dt} = 7y.$ **4.200.** $\frac{dx}{dt} = -7y, \quad \frac{dy}{dt} = 7x.$

4.5.2. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Теорема 4.13 (теорема Ляпунова об устойчивости). Пусть дана система ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(x, y). \end{cases} \tag{4.59}$$

Если существует неотрицательная дифференцируемая функция $v(x, y) \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям:

1) $v(x, y) = 0$ только при $x = y = 0$;

2) по отношению (4.59) справедливо неравенство для полной производной v по t:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} F_1(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2(x, y) \leqslant 0 \text{ при } t \geqslant t_0,$$

то точка покоя $x = y = 0$ устойчива.

Теорема 4.14 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Если существует дифференцируемая и неотрицательная функция Ляпунова $v(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $v(x, y)$ имеет строгий минимум при $x = y = 0$;

2) производная

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} F_1(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2(x, y),$$

вычисленная вдоль интегральной кривой системы (4.59), удовлетворяет условию

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} F_1(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2(x, y) \leqslant 0,$$

причем в сколь угодно малой окрестности $x^2 + y^2 \geqslant \delta^2 > 0$ при $t \geqslant T_0 \geqslant t_0$ выполняется условие

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -|\gamma| < 0,$$

где $\gamma = \text{const} \neq 0$, то точка покоя $x = y = 0$ асимптотически устойчива.

Теорема 4.15 (теорема Четаева о неустойчивости). Пусть дана система ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(t, x, y), \end{cases}$$

и пусть существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка функция $v(x, y)$, удовлетворяющая в некоторой ε-окрестности начала координат условиям:

1) для любого $\delta > 0$ существует $\alpha > 0$ и существует некоторая подобласть δ-окрестности начала координат, в которой выполняется неравенство $v(x, y) \geqslant \alpha$;

2) для любого $\alpha > 0$ существует такое $\beta > 0$, что из неравенства $v(x, y) \geqslant \alpha$ следует неравенство

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} F_1(t, x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2(t, x, y) \geqslant \beta$$

при всех $t \geqslant 0$.

Если проводится линеаризация правых частей уравнений системы ОДУ в окрестности неподвижной точки в начале координат, то не всегда качественное поведение нелинейной системы совпадает с качественным поведением линеаризованной системы.

Теорема 4.16. Пусть нелинейная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + \varphi_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

допускает линеаризацию

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

и пусть линеаризованная система имеет простую точку покоя $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Тогда в окрестности начала координат фазовые траектории нелинейной системы и линеаризованной качественно эквивалентны, если только точка покоя $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ не является центром.

4.5.2.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Исследовать на устойчивость точки покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы ОДУ.

4.201. $\dfrac{dx}{dt} = -x + 4y - 4xy^3$, $\dfrac{dy}{dt} = -2y - x^2y^2$.

Р е ш е н и е. Общего способа построения функции Ляпунова не существует. В большинстве случаев ее ищут в виде $v(x, y) = ax^{2n} + by^{2n}$. В данном случае будем искать $v(x, y)$ в таком виде: $v(x, y) = ax^2 + by^2$. Имеем:

$$\frac{dv}{dt} = 2ax(-x + 4y - 4xy^3) + 2by(-2y - x - x^2y^2) =$$
$$= -2ax^2 + 8axy - 4ax^2y^3 - 4by^2 - 2bxy - 2bx^2y^3 =$$
$$= -2(ax^2 + 2by^2) + 8axy - 2bxy - 8ax^2y^3 - 2bx^2y^3 =$$
$$= -2(ax^2 + 2by^2) + ((8a - 2b)(xy - x^2y^3)).$$

Отсюда при $8a - 2b = 0$, $\dfrac{dv}{dt} = -2(ax^2 + 2by^2)$. Функция Лагранжа принимает вид $v(x, y) = 2(ax^2 + 2by^2) = 2a(x^2 + 8y^2)$. При $a > 0$ она всюду дифференцируема, и $v(x, y) > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, $v(0, 0) = 0$ и начало координат есть точка строгого минимума:

$$\frac{dv}{dt} = -2a(x^2 + 8y^2) \leqslant 0,$$

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - 2x^3) + 2y(-x - 5y^3) = -2(2x^4 + 5y^4) \leqslant 0.$$

Вне окрестности начала координат $\dfrac{dv}{dt} \leqslant -|\gamma| < 0$, где $\gamma \neq 0$.

Вывод: точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчива.

4.202. $\dfrac{dx}{dt} = y - 2x^3$, $\dfrac{dy}{dt} = -x - 5y^3$.

Р е ш е н и е. Построим функцию $v(x, y) = x^2 + y^2$. Покажем, что она удовлетворяет всем условиям теоремы 4.14, т. е. является функцией Ляпунова.

а) Она всюду дифференцируема, $v(x, y) > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, $v(0, 0) = 0$ и начало координат есть точка строгого минимума.

б) $\frac{dv}{dt} = 2x(y-2x^3) + 2y(-x-5y^3) = -2(2x^4 + 5y^4) \leqslant 0$. Вне окрестности начала координат $\frac{dv}{dt} \leqslant -|\gamma| < 0$, где $\gamma \neq 0$.

Вывод: точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчива.

4.203. $\frac{dx}{dt} = y - \frac{x}{2} - \frac{xy^3}{2}$, $\frac{dy}{dt} = -y - 2x + x^2y^2$.

Р е ш е н и е. Построим функцию $v(x, y) = 2x^2 + y^2$ и покажем, что она является функцией Ляпунова.

а) Она всюду дифференцируема и $v(x, y) > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, $v(0, 0) = 0$ и начало координат есть точка строгого минимума.

б) $\frac{dv}{dt} = 4x\left(y - \frac{x}{2} - \frac{xy^3}{2}\right) + 2y(-y - 2x + x^2y^2) = -2(x^2 + y^2) \leqslant 0$.

Вне окрестности начала координат $\frac{dv}{dt} \leqslant -|\gamma| < 0$, где $\gamma \neq 0$.

Вывод: точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчива.

4.204. $\frac{dx}{dt} = y^3 + 2x^5$, $\frac{dy}{dt} = x^3 + 2y^5$.

Р е ш е н и е. Построим функцию $v(x, y) = 2x^4 - 2y^4$ и покажем, что она удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева.

а) $v(x, y) > 0$ при $|x| > |y|$;

б) $\frac{dv}{dt} = 8x^3(y^3 + 2x^5) - 8y^3(x^3 + 2y^5) =$

$= -16(x^8 - y^8) > 0$ при $|x| > |y|$.

Вывод: точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчива.

4.205. Исследовать на устойчивость по первому приближению

$$\frac{dx}{dt} = 2 - e^y - 3x - \cos x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y + 8\sin x.$$

Р е ш е н и е. Выпишем первые три члена разложения экспоненты, синуса и косинуса в ряд Маклорена.

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \ldots; \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots .$$

Если ограничиться членами только первого порядка малости и подставить вместо этих функций $e^y \approx 1 + y$; $\cos x \approx 1$; $\sin x \approx x$, то систему можно переписать так:

$$\frac{dx}{dt} = -3x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 8x + 2y.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (-3-\lambda) & -1 \\ 8 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, действительная часть отрицательна, мнимая — отлична от нуля:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2}, \quad \alpha = -\frac{1}{2} < 0, \quad \beta = \frac{\sqrt{7}}{2} \neq 0 \text{ (случай 2а).}$$

Точка покоя устойчива.

4.206. Показать, что две системы:

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2),$$

имеют одну и ту же линеаризацию вблизи начала координат, но их фазовые траектории качественно различны.

Линеаризации обеих этих систем имеют один и тот же вид:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Точка покоя — центр в начале координат (рис. 4.11).

В полярных координатах первая система имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = (\rho(\varphi))^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Траектории — спирали, раскручивающиеся при возрастании t (рис. 4.12). Точка покоя неустойчива.

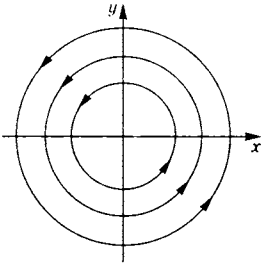

Рис. 4.11

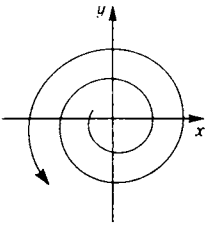

Рис. 4.12

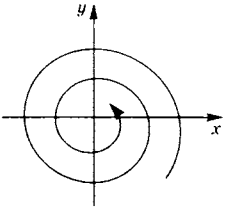

Рис. 4.13

Вторая система в полярных координатах имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -(\rho(\varphi))^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Траектории — спирали, закручивающиеся вокруг начала координат при возрастании t (рис. 14.3). Точка покоя устойчива.

В то же время в достаточно малой окрестности начала координат траектории исходных систем с любой точностью приближаются к траекториям линеаризованной системы

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

4.5.2.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

Исследовать на устойчивость.

4.207. $\frac{dx}{dt} = -x + 3y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -xy - y^3.$

4.208. $\frac{dx}{dt} = -3x + xy - xy^2 - \frac{1}{2}x^2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + xy - y^3 - \frac{1}{2}x^2y.$

4.209. $\frac{dx}{dt} = -y - \frac{1}{3}x - 2x^2y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y + \frac{3}{2}x + 3x^3y.$

4.210. $\frac{dx}{dt} = y - x + xy, \quad \frac{dy}{dt} = -y - x - y^3 - x^2.$

4.211. $\frac{dx}{dt} = -xy^4, \quad \frac{dy}{dt} = x^4y.$

4.212. $\frac{dx}{dt} = -x^3 + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = -y^3 - 4x.$

4.213. $\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = y(2 + \cos y).$

4.214. $\frac{dx}{dt} = x^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x^5 + y^2.$

4.215. $\frac{dx}{dt} = y^3 + 5x^5, \quad \frac{dy}{dt} = x^3 + 5y^5.$

4.216. $\frac{dx}{dt} = y + x^5, \quad \frac{dy}{dt} = -x + y^5.$

4.217. $\frac{dx}{dt} = x + 2xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2y + 4x^2 y.$

Исследовать на устойчивость по первому приближению.

4.218. $\frac{dx}{dt} = -x - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x.$

4.219. $\frac{dx}{dt} = y + x + y^2 x, \quad \frac{dy}{dt} = 4\sin y + \ln(1 + x).$

4.220. $\frac{dx}{dt} = -\sin x + \frac{1}{5}y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^y - 1}{4} - 9x.$

4.221. $\frac{dx}{dt} = -x + y - x^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^2.$

4.5.3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПОМОЩЬЮ АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

При исследовании устойчивости может быть применен метод исследования абсолютной или относительной погрешности решения ОДУ по отношению к выбранному параметру.

Из постановки задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t, a), a), \quad y(a)_{t=t_0} = y_0(a),$$

где a — параметр либо в функции правой части, либо в начальном условии, можно получить постановку задачи для $u = \dfrac{\partial y(t,a)}{\partial a}$.

Например, если $a = y_0$, то получается следующая задача для $u = \dfrac{\partial y(t, y_0))}{\partial y_0}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u, \quad u(a)_{t=t_0} = 1. \tag{4.60}$$

Если параметр a в правой части дифференциального уравнения, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial a}, \quad u(a)_{t=t_0} = 0. \tag{4.61}$$

Если решение задачи Коши (4.60), (4.61) неограниченно возрастает с изменением x, то решение неустойчиво по отношению к выбранному параметру a. Если же $u = \dfrac{\partial y(x,a)}{\partial a}$ стремится к нулю при $x \to \infty$, то решение устойчиво (нечувствительно) по отношению к малым изменениям a.

Для дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} m_1 \frac{d^2y}{dt^2} + m_2 \frac{dy}{dt} + m_3 y = 0, \\ y(t, m_1, m_2, m_3) = y_{01}, \quad y'(t, m_1, m_2, m_3) = y_{02} \end{gathered} \tag{4.62}$$

получается задача для $u = \dfrac{\partial y}{\partial m_2}$, $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{gathered} m_1 \frac{d^2u}{dt^2} + m_2 \frac{du}{dx} + m_3 y = -\frac{dy}{dt}, \\ u_{t=t_0}(t, m_1, m_2, m_3) = 0, \\ u'_{t=t_0}(t, m_1, m_2, m_3) = 0, \\ u(x_0) = 0, \quad u'_x(x_0) = 0. \end{gathered}$$

4.5.3.1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.222. Найти стационарные решения задачи Коши и исследовать их на устойчивость по отношению к начальному условию: $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 1$, $y(0) = y_0$.

Первый способ. Найдем решение и затем продифференцируем его по y_0. Это уравнение с разделяющимися переменными. Имеем:

$$\frac{dy}{y^2-1}=dt;\quad \int\frac{dy}{y^2-1}=\int dt;\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=t+\frac{1}{2}\ln C;$$

$$\frac{y-1}{y+1}Ce^{2t};\quad y-1=(y+1)Ce^{2t};$$

$$(1-Ce^{2t})y=1+Ce^{2t};\quad y(t)=\frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}.$$

Воспользуемся начальным условием и определим C:

$$\frac{1+C}{1-C}=y_0,\quad C=\frac{y_0-1}{y_0+1}.$$

Отсюда $y(t;y_0)=\dfrac{(y_0+1)+(y_0-1)Ce^{2t}}{(y_0+1)-(y_0-1)Ce^{2t}}$. Найдем:

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}=\frac{(1+e^{2t})((y_0+1)-(y_0-1)e^{2t})-(1-e^{2t})((y_0+1)+(y_0-1)e^{2t})}{((y_0+1)-(y_0-1)e^{2t})^2}=$$

$$=\frac{4e^{2t}}{((y_0+1)-(y_0-1)e^{2t}))}.$$

Стационарные решения исходного ОДУ определим, приравняв правую часть к нулю: $y^2-1=0$. Первое решение $y_1=-1$ удовлетворяет начальному условию $y_0=-1$. Для него $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\Big|_{y_0=-1}=e^{-2t}$ и абсолютная погрешность

$$\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|\Delta y_0=e^{-2t}\Delta y_0\to 0,$$

когда $t\to+\infty$. Первое решение устойчиво. Второе решение $y_2=1$ удовлетворяет начальному условию $y_0=1$. Для него $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\Big|_{y_0=1}=e^{2t}$ и абсолютная погрешность

$$\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|\Delta y_0=e^{2t}\Delta y_0\to+\infty,$$

когда $t\to+\infty$. Второе решение неустойчиво.

Второй способ. После того как найдены стационарные решения, составим задачу для $u = \frac{\partial y}{\partial y_0}$. Продифференцируем по y_0 исходное уравнение и начальное условие. Имеем $\frac{du}{dt} = 2yu$, $u(0) = 1$. Подставим в уравнение для u вместо y первое стационарное решение $y = -1$, получаем $\frac{du}{dt} = -2u$. Его решение при данном начальном условии: $u = e^{-2t}$, $\Delta y = |u|\Delta y_0 = e^{-2t}\Delta y_0 \to 0$ при $t \to +\infty$. Решение устойчиво. Аналогично для второго решения получим $\frac{du}{dt} = 2u$, $u = e^{2t}$, $\Delta y = |u|\Delta y_0 = e^{2t}\Delta y_0 \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Решение неустойчиво.

4.223. Найти стационарные решения задачи Коши и исследовать их на устойчивость по отношению к начальному условию:

$$\frac{dy}{dt} = (y-1)y(y+1), \quad y(t_0) = y_0.$$

Перепишем задачу в одном конкретном случае, когда

$$t_0 = 0,\ y(t_0) = y_0,\ \frac{dy}{dt} = y^3 - y,\ y(0) = y_0.$$

Решение этой задачи можно записать в виде $y(t_0, y_0, t)$.

Рассмотрим четыре случая.

1-е решение имеет вид $y = 0$, оно получается при $y(0) = y_0 = 0$.

2-е решение: $y = -1$, оно получается при $y(0) = y_0 = -1$.

3-е решение: $y = 1$, оно получается при $y(0) = y_0 = 1$.

4-е решение в неявной форме имеет вид

$$\frac{|1-y^2|}{y^2} = \frac{|1-y_0^2|}{y_0^2} e^{2t}.$$

Интегральные кривые исходного уравнения представлены на рис. 4.14.

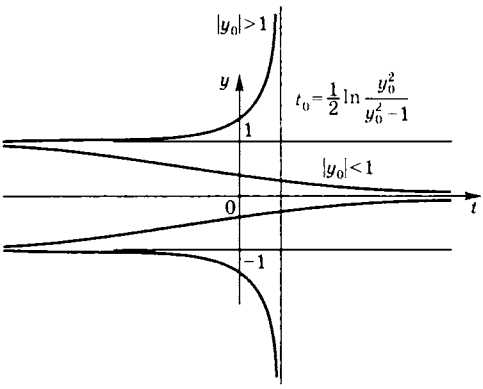

Рис. 4.14

Из этого рисунка видно, что решение $y = 0$ устойчиво при $t > 0$ и неустойчиво при $t < 0$, а решения $y = \pm 1$, наоборот, неустойчивы при $t > 0$ и устойчивы при $t < 0$. Эти выводы легко подтвердить расчетами. Пусть $u(t) = \dfrac{\partial y}{\partial y_0}$, продифференцировав исходное уравнение по y_0, получим уравнение для этой функции с начальным условием $u(0) = 1$:

$$\frac{du}{dt} = (3y^2 - 1)u, \quad u(0) = 1.$$

Отсюда при $y = 0$ $u = e^{-t}$, а при $y = \pm 1$ $u = e^{2t}$, следовательно, абсолютная погрешность равна:

$$\Delta y = e^{-t}\Delta y_0 (y = 0),$$
$$\Delta y = e^{2t}\Delta y_0 (y = \pm 1).$$

Теперь уже нетрудно получить высказанные ранее выводы.

4.5.3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ОТВЕТАМИ

4.224. $\dfrac{dy}{dt} = (y-1)^2, \quad y(0) = y_0.$

4.225. $\dfrac{dy}{dt} = (y+1)^3, \quad y(0) = y_0.$

4.226. $\frac{dy}{dt} = y^3 - 3y^2 + 3y - 1, \quad y(0) = y_0.$

4.227. $\frac{dy}{dt} = y^2 - 3y + 2, \quad y(0) = y_0.$

4.228. $\frac{dy}{dt} = y^2 + 6y + 8, \quad y(0) = y_0.$

4.229. $\frac{dy}{dt} = y^2 + 5y, \quad y(0) = y_0.$

4.230. $\frac{dy}{dt} = y^2 - 5y, \quad y(0) = y_0.$

4.231. $\frac{dy}{dt} = (y+2)^4, \quad y(0) = y_0.$

4.232. $\frac{dy}{dt} = (y-2)^5, \quad y(0) = y_0.$

4.233. $\frac{dy}{dt} = y^3 - 2y^2 + y, \quad y(0) = y_0.$

4.234. $\frac{dy}{dt} = (y^2 + y - 2)^2, \quad y(0) = y_0.$

4.235. $\frac{dy}{dt} = (y^2 - 7y + 10)^9, \quad y(0) = y_0.$

4.236. $\frac{dy}{dt} = (y^4 - y^2)^5, \quad y(0) = y_0.$

4.237. $\frac{dy}{dt} = (y^4 + y^2)^8, \quad y(0) = y_0.$

4.238. $\frac{dy}{dt} = y^6 - 1, \quad y(0) = y_0.$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1

Вычислить двойной интеграл по указанной области Ω.

Таблица 1

1	$\iint\limits_{\Omega} y^2 \sin\frac{xy}{2}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 2,\ \ y \geqslant \frac{x}{2}$	7	$\iint\limits_{\Omega} y^2 \cos 3xy\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 3,\ \ y \geqslant \frac{x}{3}$
2	$\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{-\frac{xy}{4}}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 2,\ \ y \geqslant x$	8	$\iint\limits_{\Omega} x^2 \cos 4xy\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 4,\ \ y \geqslant \frac{x}{4}$
3	$\iint\limits_{\Omega} y^2 \sin xy\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 1,\ \ y \geqslant 2x$	9	$\iint\limits_{\Omega} x^2 e^{4xy}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 2,\ \ y \geqslant \frac{x}{2}$
4	$\iint\limits_{\Omega} y^2 \cos\frac{xy}{3}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 3,\ \ y \geqslant 3x$	10	$\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{2xy}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 3,\ \ y \geqslant 2x$
5	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) e^{-xy}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 1,\ \ y \geqslant x$	11	$\iint\limits_{\Omega} x^2 e^{-2xy}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 2,\ \ y \geqslant \frac{x}{2}$
6	$\iint\limits_{\Omega} x^2 \cos\frac{xy}{3}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 2,\ \ y \geqslant \frac{x}{2}$	12	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + 3y^2) e^{xy}\,dxdy,$ $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 2,\ \ y \geqslant x$

Продолжение табл. 1

13	$\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{3xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 1,\ y \geqslant 2x$	22	$\iint\limits_{\Omega} x^2 \sin\frac{xy}{3}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 3,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{x}{3}$
14	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 - y^2)e^{-xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 3,\ y \geqslant 3x$	23	$\iint\limits_{\Omega} y^2 \cos\frac{xy}{4}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{x}{4}$
15	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\sin xy\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 1,\ y \geqslant x$	24	$\iint\limits_{\Omega} x^2 e^{2xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 3,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant 2x$
16	$\iint\limits_{\Omega} x^2 \sin 2xy\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 2,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{x}{2}$	25	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 - 2y^2)e^{xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 1,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x$
17	$\iint\limits_{\Omega} x^2 e^{-xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 1,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant 2x$	26	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 - y^2)\cos xy\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 2,\ y \geqslant \frac{x}{2}$
18	$\iint\limits_{\Omega} x^2 \sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 3,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{x}{3}$	27	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 - 2y^2)\sin 2xy\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 3,\ y \geqslant \frac{x}{3}$
19	$\iint\limits_{\Omega} x^2 \cos\frac{xy}{4}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ \leqslant \frac{x}{4}$	28	$\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{-5xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 4,\ y \geqslant \frac{x}{4}$
20	$\iint\limits_{\Omega} (2x^2 + 3y^2)e^{xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 1,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x$	29	$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)e^{-3xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 2,\ y \geqslant \frac{x}{2}$
21	$\iint\limits_{\Omega} (3x^2 + 2y^2)\sin xy\,dx\,dy,$ Ω: $x \leqslant 2,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x$	30	$\iint\limits_{\Omega} xy e^{xy}\,dx\,dy,$ Ω: $x \geqslant 0,\ y \leqslant 3,\ y \geqslant 2x$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Проведем вычисления для следующего интеграла:

$$\int\limits_{\Omega}\int x^2 e^{xy}dxdy\Omega = \{(x, y):\ \ x \geqslant 0;\ \ y \leqslant 2;\ \ y \geqslant 2x\}.$$

Применим формулу повторного интегрирования: внутренний интеграл по переменной y, внешний — по x.

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 e^{xy}dxdy = \int\limits_0^1 x^2 dx \int\limits_{2x}^{2} e^{xy}dy = \int\limits_0^1 x^2 dx \left.\frac{e^{xy}}{x}\right|_{2x}^{2} =$$

$$= \int\limits_0^1 x(e^{2x} - e^{2x^2})dx = \left(\frac{e^{2x}}{2}x - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{4}e^{2x^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧА 2

Вычислить объем указанной области Ω с помощью двойного интеграла, переходя к полярным координатам.

Таблица 2

1	$\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,$ $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{x+y}{x^2+y^2}$	6	$\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 0,$ $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{x-3y}{x^2+y^2}$
2	$\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 0,$ $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{2x-3y}{x^2+y^2}$	7	$\Omega:\ x \leqslant 0,\ \ y \leqslant 0,$ $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,$ $0 \leqslant z \leqslant -\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$
3	$\Omega:\ x \leqslant 0,\ \ y \geqslant 0,$ $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{2y-x}{x^2+y^2}$	8	$\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 0,$ $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{x-4y}{x^2+y^2}$
4	$\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,$ $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{x+3y}{x^2+y^2}$	9	$\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,$ $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{5x+3y}{x^2+y^2}$
5	$\Omega:\ x \leqslant 0,\ \ y \leqslant 0,$ $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,$ $0 \leqslant z \leqslant -\frac{x+y}{x^2+y^2}$	10	$\Omega:\ x \leqslant 0,\ \ y \geqslant 0,$ $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25,$ $0 \leqslant z \leqslant \frac{2y-3x}{x^2+y^2}$

Продолжение табл. 2

11	Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$	21	Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{y+x}{x^2+y^2}$
12	Ω: $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{3y-2x}{x^2+y^2}$	22	Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 5$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{3x+2y}{x^2+y^2}$
13	Ω: $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant -\dfrac{5x+4y}{x^2+y^2}$	23	Ω: $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{2y-5x}{x^2+y^2}$
14	Ω: $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{3x-7y}{x^2+y^2}$	24	Ω: $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant -\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$
15	Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{11x+13y}{x^2+y^2}$	25	Ω: $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{3x-2y}{x^2+y^2}$
16	Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$	26	Ω: $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $3 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 5$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{13y-x}{x^2+y^2}$
17	Ω: $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$	27	Ω: $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $3 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 6$, $0 \leqslant z \leqslant -\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$
18	Ω: $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{2y-5x}{x^2+y^2}$	28	Ω: $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{3x=2y}{x^2+y^2}$
19	Ω: $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{-2x-3y}{x^2+y^2}$	29	Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 7$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$
20	Ω: $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25$, $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{y-5x}{x^2+y^2}$	30	Ω: $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 10$, $0 \leqslant z \leqslant -\dfrac{13x+17y}{x^2+y^2}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Найдем объем области Ω, которая задается следующей системой неравенств:

$$\Omega:\ x \geqslant 0;\ \ y \geqslant 0;\ \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3;\ \ 0 \leqslant z \leqslant \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$$

Введем полярные координаты $x = \rho \cdot \cos\varphi$; $y = \rho \cdot \sin\varphi$.

Требуется вычислить двойной интеграл по проекции Ω на плоскость OXY, переходя к полярным координатам.

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{2x+3y}{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{3}} \rho \frac{(2\cos\varphi + 3\sin\varphi)}{\rho^2}\rho d\rho =$$

$$= \left(\sqrt{3}-1\right)\int\limits_0^{\pi/2}(2\cos\varphi + 3\sin\varphi)d\varphi = \left(\sqrt{3}-1\right)(2\sin\varphi - 3\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 5\left(\sqrt{3}-1\right).$$

ЗАДАЧА 3

Вычислить массу тела Ω с заданной плотностью ρ с помощью тройного интеграла.

Таблица 3

1	$\rho = x^2$, $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ x + y \leqslant 1,$ $0 \leqslant z \leqslant 10(x + 3y)$	5	$\rho = 1 + 2\sqrt{y}$, $\Omega:\ x \leqslant 1,\ \ y \geqslant 0,\ \ y \leqslant x,$ $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{xy}$
2	$\rho = \left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^5$, $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0,$ $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} \leqslant 1$	6	$\rho = 1 + 2x^3$, $\Omega:\ x \leqslant 1,\ \ y \geqslant 0,\ \ y \leqslant 36x,$ $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{xy}$
3	$\rho = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4}\right)^3$, $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0,$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leqslant 1$	7	$\rho = 4 + z^3$, $\Omega:\ x \leqslant 1,\ \ y \geqslant 0,\ \ y \leqslant x,$ $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{xy}$
4	$\rho = x^2 + 4y^2$, $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ x + y \leqslant 1,$ $0 \leqslant z \leqslant 20 \cdot (2x + y)$	8	$\rho = (1 + x + y + 2z)^4$, $\Omega:\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0,$ $x + y + 2z \leqslant 1$

Продолжение табл. 3

9	$\rho = 5x + z$, Ω: $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + 3y^2$	20	$\rho = x^2 z$, Ω: $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 3x$, $0 \leqslant z \leqslant xy$
10	$\rho = 8y + 12z$, Ω: $x \leqslant 3$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant 3x^2 + 2y^2$	21	$\rho = x + 2y + z$, Ω: $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2x$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$
11	$\rho = x + y + 2z$, Ω: $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x/2$, $0 \leqslant z \leqslant 2x^2 + y^2$	22	$\rho = x + 3y + 5z$, Ω: $x \leqslant 3$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant \frac{x}{2}$, $0 \leqslant z \leqslant 2x^2 + 3y^2$
12	$\rho = x^2 + xy + z^2$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant x + 2y$	23	$\rho = x + 10z$, Ω: $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2x$, $0 \leqslant z \leqslant x + y$
13	$\rho = x^3 + xz + z^2$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 2x + 3y$	24	$\rho = x^2 y$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + 3z \leqslant 1$
14	$\rho = xy + z^3$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x + y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$	25	$\rho = xyz$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + 2y + 3z \leqslant 6$
15	$\rho = (1 + 2x + y + z)^3$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $2x + y + 3z \leqslant 6$	26	$\rho = 1 + xy + z^3$, Ω: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant x/3$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$
16	$\rho = 8y + 12z$, Ω: $x \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant 3x^2 + 2y^2$	27	$\rho = x^2 + 3y^2$, Ω: $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant 4y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant xy$
17	$\rho = 5x + \frac{3z}{2}$, Ω: $x \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + 15y^2$	28	$\rho = x^3 z$, Ω: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $x \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 3xy$
18	$\rho = x^2 z$, Ω: $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 3x$, $0 \leqslant z \leqslant xy$	29	$\rho = z^3 xy$, Ω: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $3x \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant x + y$
19	$\rho = x^2 + 3y^2 + z^2$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 10x$	30	$\rho = (x^2 - xy + y^2)z$, Ω: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3

Найдем массу тела Ω: $x \leqslant 1$; $y \geqslant 0$; $y \leqslant 2x$; $0 \leqslant z \leqslant 3xy$, если плотность $\rho = x^2 + y^2 + 2z^2$.

Согласно физическому смыслу тройного интеграла масса тела Ω равна

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{3xy} (x^2 + y^2 + 2z^2) dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \left(x^2 z + y^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) \Bigg|_0^{3xy} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (3x^3 y + 3xy^3 + 18x^3 y^3) dy = \int_0^1 \left(3x^3 \frac{y^2}{2} + \frac{3}{4} xy^4 + \frac{9}{2} x^3 y^4 \right) \Bigg|_0^{2x} dx =$$

$$= \int_0^1 (6x^5 + 12x^5 + 72x^7) dx = (x^6 + 2x^6 + 9x^8) \Big|_0^1 = 12.$$

ЗАДАЧА 4

Вычислить криволинейный интеграл для заданного векторного поля $\vec{A}$ вдоль замкнутой ломаной с вершинами P_1, P_2, P_3. Вычислить этот же интеграл с помощью формулы Грина.

Таблица 4

1	$\vec{A} = (2x + y,\ x - y)$, $P_1(0,1)$, $P_2(0,2)$, $P_3(1,1)$	7	$\vec{A} = (2x + 3y,\ 5y - 2x)$, $P_1(-1,1)$, $P_2(0,0)$, $P_3(0.6)$
2	$\vec{A} = (3x - y,\ 4x + y)$, $P_1(0,0)$, $P_2(-1,2)$, $P_3(3,2)$	8	$\vec{A} = (5x - y + 3,\ 6x - 2y + 2)$, $P_1(-1,2)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,7)$
3	$\vec{A} = (7x - y,\ 2x + y)$, $P_1(-1,-1)$, $P_2(0,1)$, $P_3(3,2)$	9	$\vec{A} = (2x - 2y + 6,\ x + y)$, $P_1(0,0)$, $P_2(0.1)$, $P_3(1,7)$
4	$\vec{A} = (2x - y,\ x + y)$, $P_1(-1,2)$, $P_2(0,1)$, $P_3(5,2)$	10	$\vec{A} = (x + 2y - 1,\ x - 3y)$, $P_1(0,0)$, $P_2(0.7)$, $P_3(5,1)$
5	$\vec{A} = (3x - y,\ 5x + y)$, $P_1(-1,2)$, $P_2(-1,3)$, $P_3(2,2)$	11	$\vec{A} = (3x + 4y,\ 2x - y)$, $P_1(1,0)$, $P_2(3,0)$, $P_3(4,3)$
6	$\vec{A} = (2x + y,\ 5y - x)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,5)$	12	$\vec{A} = (4x - 3y,\ 2x + y)$, $P_1(0,2)$, $P_2(0,3)$, $P_3(1,4)$

Продолжение табл. 4

13	$\vec{A} = (5x + 4y,\ -x + y)$, $P_1(0, 3)$, $P_2(0, 5)$, $P_3(2, 3)$	22	$\vec{A} = (x - 3y,\ 2y + x)$, $P_1(-1, -1)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(4, 2)$
14	$\vec{A} = (2x - y,\ 2x + 3y)$, $P_1(1, 0)$, $P_2(5, 0)$, $P_3(4, 3)$	23	$\vec{A} = (2x - 3y - 1,\ x - 2y + 3)$, $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(0, 4)$
15	$\vec{A} = (5x + 3y,\ 2x - 3y)$, $P_1(7, 0)$, $P_2(9, 0)$, $P_3(3, 4)$	24	$\vec{A} = (x - 2y + 1,\ x + 3y - 2)$, $P_1(0, 1)$, $P_2(-1, 2)$, $P_3(2, 3)$
16	$\vec{A} = (3x - y,\ x + y)$, $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(-3, 2)$	25	$\vec{A} = (2x - 3y,\ 3x - 2y + 1)$, $P_1(-1, -1)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(0, 7)$
17	$\vec{A} = (3x + 2y,\ 2x - y)$, $P_1(0, -1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, -1)$	26	$\vec{A} = (7x + 5y,\ 2x - 4y)$, $P_1(0, 2)$, $P_2(0, 9)$, $P_3(5, 3)$
18	$\vec{A} = (x + 2y,\ x - y)$, $P_1(-1, 2)$, $P_2(1, 3)$, $P_3(1, -2)$	27	$\vec{A} = (9x - 10y,\ 12x + 3y)$, $P_1(0, 3)$, $P_2(0, 7)$, $P_3(11, 2)$
19	$\vec{A} = (2x - 3y,\ 4x + 5y)$, $P_1(-1, -1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(2, 3)$	28	$\vec{A} = (11x + 13y,\ x + 3y)$, $P_1(1, 0)$, $P_2(3, 0)$, $P_3(11, 12)$
20	$\vec{A} = (x + y,\ 3x + 2y + 1)$, $P_1(0, 0)$, $P_2(-1, 2)$, $P_3(0, 4)$	29	$\vec{A} = (13x - 7y,\ 5x + 8y)$, $P_1(-1, 0)$, $P_2(3, 0)$, $P_3(-12, 3)$
21	$\vec{A} = (y - 2x,\ 5x - 2y)$, $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 2)$, $P_3(0, 5)$	30	$\vec{A} = (15x + 12y,\ -7x + 5y)$, $P_1(-10, 0)$, $P_2(7, 0)$, $P_3(-13, -11)$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 4

Пусть векторное поле $\vec{A}$ задано в виде

$$\vec{A} = (2x + 5y,\ 3x - 4y + 3).$$

Замкнутая ломаная задана своими вершинами:

$$P_1(-1, -1);\ P_2(1, 1);\ P_3(-3, 3).$$

Прежде всего, напомним формулу Грина:

$$\int\limits_{P_1P_2P_3} \vec{A}ds = \int\limits_{P_1P_2P_3} (2x + 5y)dx + (3x - 4y + 3)dy =$$

$$= \iint\limits_{\Delta P_1P_2P_3} (Q_x - P_y)dxdy = \iint\limits_{\Delta P_1P_2P_3} (3 - 5)dxdy = -2 \iint\limits_{\Delta P_1P_2P_3} dxdy.$$

Последний интеграл по геометрическому смыслу двойного интеграла численно равен площади треугольника с вершинами $P_1P_2P_3$:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=6.$$

Таким образом, $-2\iint\limits_{\triangle P_1P_2P_3} dxdy=-12.$

Для вычисления криволинейного интеграла произведем параметризацию отрезков P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1:

$$P_1P_2\colon x=-1+2t;\ \ y=-1+2t;\ \ 0\leqslant t\leqslant 1;$$
$$P_2P_3\colon x=1-4t;\ \ y=1+2t;\ \ 0\leqslant t\leqslant 1;$$
$$P_3P_1\colon x=-3+2t;\ \ y=3-4t;\ \ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Далее, используя аддитивность криволинейного интеграла, получаем:

$$\int\limits_{P_1P_2P_3}=\int\limits_{P_1P_2}+\int\limits_{P_2P_3}+\int\limits_{P_3P_1};$$

$$\int\limits_{P_1P_2}=\int\limits_0^1[2(-1+2t)+5(-1+2t)]2dt+\int\limits_0^1[3(-1+2t)-4(-1+2t)+3]2dt=$$

$$=\int\limits_0^1(-14+28t)dt+\int\limits_0^1(8-4t)dt=6;$$

$$\int\limits_{P_2P_3}=\int\limits_0^1[2(1-4t)+5(1+2t)](-4)dt+\int\limits_0^1[3(1-4t)-4(1+2t)+3]2dt=$$

$$=\int\limits_0^1(-8t-28)dt+\int\limits_0^1(-40t+4)dt=-32-16=-48;$$

$$\int\limits_{P_3P_1}=\int\limits_0^1[2(-3+2t)+5(3-4t)]2dt+\int\limits_0^1[3(-3+2t)-4(3-4t)+3](-4)dt=$$

$$=\int\limits_0^1(-32t+18)dt+\int\limits_0^1(-88t+72)dt=2+28=30.$$

Складывая полученные значения, находим:

$$\int\limits_{P_1P_2P_3}\vec{A}d\vec{s}=6-48+30=-12.$$

ЗАДАЧА 5

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ от точки M до N от заданного векторного поля $\vec{A}$.

Таблица 5

1	$\vec{A} = (x^2 - 2y,\ y^2 - 2x)$. Γ: $y - 3x^2 = 0$, $M(0.0)$, $N(1, 3)$	10	$\vec{A} = (xy,\ 2y)$, Γ: $x^2 + y^2 = 1$, $M(1, 0)$. $N(0, 1)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$
2	$\vec{A} = (x^2 + 2y,\ y^2 + 2x)$, Γ: $y - 4x^3 = 0$, $M(-1, -4)$. $N(1, 4)$	11	$\vec{A} = (y^2 - y,\ 2xy + 3y)$, Γ: $x^2 + y^2 = 4$, $M(-2, 0)$, $N(0, 2)$, $y \geqslant 0$
3	$\vec{A} = (x^3 + y^2,\ x^2 - y^2)$. Γ: $y = \lvert x \rvert$, $M(-1.1)$, $N(1, 1)$	12	$\vec{A} = (x^2 - 2y^2,\ x^2 + 3y^2)$, Γ: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $M(-2, 0)$, $N(0, 3)$, $y \geqslant 0$
4	$\vec{A} = (y,\ -x)$, Γ: $x^2 + y^2 = 1$, $M(1, 0)$, $N(-1, 0)$	13	$\vec{A} = (x + y,\ x^2 - y^2)$, Γ: $y^2 - x = 0$, $M(0, 0)$, $N(1, 1)$
5	$\vec{A} = (x - y,\ 1)$, Γ: $x^2 + y^2 = 4$, $M(2, 0)$, $N(-2, 0)$	14	$\vec{A} = (xy,\ 3x)$, Γ: $y^3 - x = 0$, $M(0, 0)$. $N(1, 1)$
6	$\vec{A} = \left(xy - x,\ \frac{x^2}{2}\right)$, Γ: $y = \sqrt{x}$, $M(0, 0)$, $N(4, 2)$	15	$\vec{A} = (x^2 - 2x,\ 3xy + y)$, Γ: $y^4 - x = 0$. $M(1, 1)$, $N(2, 16)$
7	$\vec{A} = (y^2 - y,\ 2xy + x)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$, $M(3, 0)$, $N(-3, 0)$	16	$\vec{A} = (x + y,\ 2x)$, Γ: $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$, $M(2, 0)$. $N(-2, 0)$
8	$\vec{A} = (y^2,\ -x^2)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$, $M(3, 0)$, $N(0, 3)$	17	$\vec{A} = (x + y,\ x - y)$, Γ: $y - x^2 = 0$, $M(0, 0)$, $N(1, 1)$
9	$\vec{A} = \begin{pmatrix} x + y\sqrt{x^2 + y^2}, \\ y - \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$, Γ: $x^2 + y^2 = 16$, $M(4, 0)$, $N(0, 4)$	18	$\vec{A} = (2xy - y,\ x^2 + x)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$, $y \geqslant 0$, $M(3, 0)$, $N(-3, 0)$

Продолжение табл. 5

19	$\vec{A} = (xy - y^2, -y)$. Γ: $y = -2x^2$, $M(0, 0)$, $N(1, -2)$	25	$\vec{A} = (x^2 + y^2, y^2)$, Γ: $x^2 + y^2 = 1$. $M(1, 0)$. $N(0, 1)$. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$
20	$\vec{A} = (xy - y^2, x)$, Γ: $y - 2x^2 = 0$, $M(0, 0)$, $N(1, 2)$	26	$\vec{A} = (x, -y)$, Γ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. $M(3, 0)$, $N(-3, 0)$, $y \leqslant 0$
21	$\vec{A} = (-x, y)$, Γ: $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. $M(1, 0)$, $N(0, 3)$	27	$\vec{A} = (y^2 - x, y^2/2)$, Γ: $y^2 - 16x = 0$, $M(1, 2)$. $N(0, 0)$
22	$\vec{A} = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$. Γ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \geqslant 0$. $M(3, 0)$, $N(-3, 0)$	28	$\vec{A} = (x^3 + 1, y^3 - 1)$, Γ: $y^2 = 4x$. $M(1, 2)$, $N(1, -2)$
23	$\vec{A} = (xy, 0)$, Γ: $y - \sin x = 0$, $M(\pi, 0)$, $N(0, 0)$	29	$\vec{A} = (y^2 + x, y - x)$, Γ: $y = 8x^3$. $M(0, 0)$, $N(1, 8)$
24	$\vec{A} = ((x + y)^2, -x^2 - y^2)$, Γ: $y - x^3 = 0$. $M(0, 0)$, $N(1, 1)$	30	$\vec{A} = (xy, x - y)$, Γ: $x^2 + y^2 = 1$, $M(1, 0)$. $N(0, 1)$, $y \geqslant 0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 5

Пусть векторное поле $\vec{A}$ имеет вид:

$$\vec{A} = ((x - y)^2, \; x^2 + y^2 - 1).$$

Вычислим криволинейный интеграл вдоль кривой Γ: $x^2 + y^2 = 4$ от точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$. В данном случае удобно представить Γ в параметрической форме:

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

В таком случае криволинейный интеграл по Γ сведется к определенному интегралу:

$$\int\limits_{MN} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int\limits_{MN} (x-y)^2 dx + (x^2+y^2-1)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} [(2\cos t - 2\sin t)^2(-2\sin t) + 3\cdot 2\cos t]dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} [6\cos t - 8(\sin t - \sin 2t \sin t)] =$$

$$= 6\sin t + 8\cos t\Big|_0^{\pi/2} + 8\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \sin t dt = 6 - 8 + 16\int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt =$$

$$= -2 + 16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t d(\sin t) = -2 + 16\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}.$$

ЗАДАЧА 6

Вычислить все значения величины A.

Таблица 6

1	$A = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}}$	9	$A = \sqrt{-2i + \sqrt[4]{-16}}$
2	$A = \sqrt{1 + \sqrt[3]{i}}$	10	$A = \sqrt[10]{\frac{1+i}{1-i}}$
3	$A = \sqrt[5]{\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \sqrt{i}}$	11	$A = \sqrt[5]{\frac{-\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i}}$
4	$A = \sqrt[3]{\sqrt{i} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}}$	12	$A = \sqrt[10]{10 + \sqrt{-100}}$
5	$A = \sqrt[5]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}}$	13	$A = \sqrt[12]{-12 - \sqrt{-144}}$
6	$A = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$	14	$A = \sqrt[7]{-7 - \sqrt{-49}}$
7	$A = \sqrt[5]{\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-i}}$	15	$A = \sqrt[7]{\frac{1+i}{i} + \sqrt{-2i}}$
8	$A = \sqrt{\frac{1+i}{12} - \sqrt[5]{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}}}$	16	$A = \sqrt[5]{-\sqrt{25i} + \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)}$

Продолжение табл. 6

17	$A=\sqrt[7]{6+3i+\sqrt{-9}}$	24	$A=\sqrt[3]{-3i+\sqrt{-9}}$
18	$A=\sqrt[9]{10+5i+\sqrt{-25}}$	25	$A=\sqrt[7]{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}}$
19	$A=\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\sqrt[3]{-1}}$	26	$A=\sqrt[6]{\dfrac{-1-i}{1-i}}$
20	$A=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i+\sqrt[4]{-1}}$	27	$A=\sqrt[9]{9-\sqrt{-81}}$
21	$A=\sqrt{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\sqrt[5]{-1}}$	28	$A=\sqrt[11]{11i+\sqrt{-121}}$
22	$A=\sqrt{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}}}$	29	$A=\sqrt[10]{i(1-i)+\sqrt{2i}}$
23	$A=\sqrt{\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}-\sqrt[7]{\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}}}$	30	$A=\sqrt[5]{i(1+i)+\sqrt{2i^3}}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 6

Найдем все значения выражения $A=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}}$.

Прежде всего, вычислим $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$. Все три значения содержатся в формуле

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi k}{3}},\quad (k=0,1,2).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi k}{3}},\quad (k=0,1,2).$$

При $k=0$

$$A=\sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{2\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}\right)},$$

$$(n=0,1,2,\ldots,6).$$

При $k = 1$

$$A = \sqrt[7]{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[7]{1} = e^{i\frac{2\pi p}{7}},$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

При $k = 2$

$$A = \sqrt[7]{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[7]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}\right)},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

ЗАДАЧА 7

Найти модуль и аргумент производной от заданной функции $f(z)$.

Таблица 7

1	$f(z) = \ln(z^2 - (2i + 2)z + 2i - 1)$	16	$f(z) = \dfrac{z + i}{2z + 5}$
2	$f(z) = \operatorname{arctg}(3z + 2)$	17	$f(z) = \ln(z^2 - (i + 2)z + i + 1)$
3	$f(z) = e^{-z}(5z - 1)$	18	$f(z) = \operatorname{arctg}(z^3/8)$
4	$f(z) = \ln(z^2 + 1)$	19	$f(z) = e^{2z}(z + i)$
5	$f(z) = \operatorname{arctg}(z^2/2)$	20	$f(z) = \ln(z^2 - 2z + 1 - 2i)$
6	$f(z) = e^z(z + 2i)$	21	$f(z) = \operatorname{arctg}(z - 3i)$
7	$f(z) = \dfrac{z - 2i}{z + 3}$	22	$f(z) = 3z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 12z + 13$
8	$f(z) = \operatorname{arctg}(2z - 1)$	23	$f(z) = 3z^4 + 4iz^3 - 6z^2 - 12iz + 17$
9	$f(z) = e^{3z}(7 - z)$	24	$f(z) = 3z^4 + 4iz^3 + 6z^2 + 12iz + 1$
10	$f(z) = \ln(z^2 + z + 2i + 4)$	25	$f(z) = z^{13} - 13z + 13$
11	$f(z) = \sin z + e^{-iz}\left(-\dfrac{i}{2}\right)$	26	$f(z) = e^{3z+1}z$
12	$f(z) = \cos z + \left(\dfrac{1}{2}\right)e^{-iz}$	27	$f(z) = \ln(z^2 + 2)$
13	$f(z) = \dfrac{2z + 5}{i + 3z}$	28	$f(z) = \operatorname{arctg}(7 + 5z)$
14	$f(z) = \operatorname{arctg}(i - 3z)$	29	$f(z) = \dfrac{1 - 5z}{2z + i}$
15	$f(z) = \ln(z^2 - (1 + 3i)z + 3i)$	30	$f(z) = z^{13} + 13z - 13$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 7

Пусть $f(z) = \ln(z^2 - 2z + 2)$. Производную от этой функции вычисляем по обычным правилам:

$$f'(z) = \frac{2z-2}{z^2-2z+2}.$$

Разложим на линейные множители знаменатель этой дроби. Для этого найдем корни уравнения:

$$z^2 - 2z = 2 = 0,$$
$$z = \frac{2+\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Таким образом, получаем:

$$f'(z) = 2\frac{z-1}{(z-1-i)(z-1+i)}.$$

Находим модуль $f'(z)$:

$$|f'(z)| = 2\frac{|z-1|}{|z-1-i| \cdot |z-1+i|} =$$
$$= 2\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}.$$

Для определения $\arg f'(z)$ найдем аргументы каждого линейного множителя в $f'(z)$:

$$\varphi_1 = \arg(z-1) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x-1}\right),$$
$$\varphi_2 = \arg(z-1-i) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y-1}{x-1}\right),$$
$$\varphi_3 = \arg(z-1+i) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y+1}{x-1}\right).$$

Следовательно, аргумент производной $f'(z)$ равен:

$$\arg f'(z) = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3.$$

ЗАДАЧА 8

Вычислить несобственный интеграл.

Таблица 8

1	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$	16	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)}$
2	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+3)dx}{1+x^4}$	17	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{13x^3+11x+3}{4+x^6}dx$
3	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+3x+1}{1+x^6}dx$	18	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-2x^3+6x^2-8x+8}$
4	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$	19	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-x)}{4+x^4}dx$
5	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x^3-2x-3}{8+x^6}dx$	20	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^6+4}dx$
6	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7x+5}{16+x^4}dx$	21	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x+7}{(x^2+1)^2}dx$
7	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{(4+x^2)^2}dx$	22	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x}{x^4+12x^2+11}dx$
8	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$	23	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3-x+5}{x^6+1}dx$
9	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-6x^3+11x^2-6x+10}$	24	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+3}{x^4+7x^2+12}dx$
10	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8x+1}{16+x^4}dx$	25	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$
11	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$	26	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$
12	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$	27	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(9+x^2)^3}$
13	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)}{x^4+8x^2+15}dx$	28	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-4x^3+6x^2-4x+5}$
14	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x+2}{1+x^4}dx$	29	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x-7}{x^4+4}dx$
15	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{8+x^6}dx$	30	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{64+x^6}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 8

Найдем значение несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3+x+1}{(1+x^2)^3}dx.$$

Прежде всего, очевидно, что этот интеграл сходится (в качестве функции сравнения можно взять

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Big).$$

Представим этот интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3+x+1}{(1+x^2)^3}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3}{(1+x^2)^3}dx+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^3}dx+\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Первые два интеграла обратятся в ноль, поскольку подынтегральные функции нечетны. Поэтому достаточно найти значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$. Этот интеграл вычислим с помощью вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^3}.$$

В последнем интеграле контур C_R состоит из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности радиуса R в верхней полуплоскости z. Функция $F(z)=\frac{1}{(1+z^2)^3}$ имеет полюсы $z=\pm i$. Найдем вычет в полюсе $z=i$.

Вычет:

$$F(z)\Big|_{z=i}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}((z-i)^3F(z))\Big|_{z=i}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z+i}\right)^3\Big|_{z=i}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{12}{(z+i)^5}\Big|_{z=i}=\frac{6}{(2i)^5}=-\frac{3}{16}i.$$

По теореме о вычетах искомый интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}=2\pi i\left(-\frac{3}{16}i\right)=\frac{3}{8}\pi.$$

ЗАДАЧА 9

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Таблица 9

1	$(1+y)(e^x dx - e^{2y}dy) - (1+y^2)dy = 0$	16	$6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$
2	$2e^x \operatorname{tg} y dx + (1+e^x)\sec^2 y dy = 0$	17	$xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$
3	$(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0$	18	$\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$
4	$y' + \dfrac{x\sin x}{y\cos y} = 0$	19	$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$
5	$\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y' = 0$	20	$2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y = 0$
6	$3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0$	21	$\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$
7	$\sqrt{4-x^2}\cdot y' + xy^2 + x = 0$	22	$(1+e^x)y' = ye^x$
8	$y'\cdot y\cdot\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$	23	$y\cdot(1+\ln y) + (x^2+3)\cdot y' = 0$
9	$x\sqrt{1+y^2} + y'\cdot y\cdot\sqrt{1+x^2} = 0$	24	$y\cdot\ln y + x\cdot y' = 0$
10	$(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x$	25	$y\cdot(1+\ln y) + x\cdot y' = 0$
11	$(yx^2 + y)dx + (y^2x - x)dy = 0$	26	$\sqrt{5+x^2}dy + 4(y^2x + x)dx = 0$
12	$(1+e^x)dy - xe^x dx = 0$	27	$\sqrt{3+x^2}dy - xdx = y^2xdx$
13	$(y+1)x\cdot\ln x\cdot dx + ydy = 0$	28	$\sqrt{1-x^2}\cdot ydy + \sqrt{1-y^2}dx = 0$
14	$\sqrt{4-y^2}dx + (yx^2 + y)dy = 0$	29	$ydy - xdx = xy^2dx - yx^2dy$
15	$6ydy - 2xdx = 2xy^2dx - 3yx^2dy$	30	$(2y + 2yx^2)dy + \sqrt{2-y^2}dx = 0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 9

Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$y\ln y dx + (1+x^2)dy = 0.$$

Прежде всего, разделим переменные:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{y\ln y} = 0.$$

После интегрирования находим общий интеграл:

$$\operatorname{arctg} x + \ln|\ln y| = C.$$

Непосредственно убеждаемся, что $y = 1$ является решением нашего уравнения. Это особое решение, оно не входит в состав общего решения ни при каком значении постоянной C.

ЗАДАЧА 10

Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения.

Таблица 10

1	$(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$	12	$\left(\sqrt{xy}-y\right)dx+xdy=0$
2	$\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$	13	$\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy-ydx=0$
3	$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$	14	$yy'=\sqrt{x^2+y^2}+x$
4	$y'=\frac{y^2}{x^2}+6\frac{y}{x}+6$	15	$yy'=\frac{3x^3+14xy^2}{2x^2+7y^2}$
5	$2y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{x}{y}+8$	16	$3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$
6	$3y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+10$	17	$xy'=\frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$
7	$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$	18	$xy'=\frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$
8	$xy'=\frac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$	19	$y'=\frac{2x+3y}{y-2x}$
9	$y'=\frac{x+2y}{2x-y}$	20	$(x-y)dx+xdy=0$
10	$xy'=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$	21	$y'=\frac{8}{x}y+\frac{y^2}{x^2}+12$
11	$(y^2+xy)y' = y\sqrt{y^2-x^2}+yx+x^2$	22	$xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$

Продолжение табл. 10

23	$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$	27	$y' = \dfrac{2x + y}{2y - x}$
24	$y' = \dfrac{x + y}{x - y}$	28	$yy' = x \ln (x/y)$
25	$y' = y/x + \sin (y/x)$	29	$y' = y/x + \cos^2(x/y)$
26	$(y - x)dy + ydx = 0$	30	$y' = y/x + e^{y/x}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 10

Найдем общий интеграл однородного уравнения:

$$xy' = y - x \cdot \cos (y/x).$$

Сделаем замену $z = y/x$. После этого получим уравнение относительно функции z:

$$z + xz' = z - \cos z.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{\cos z} = -\frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получаем:

$$\int \frac{dz}{\cos z} + \ln |x| = C.$$

Вычислим интеграл, входящий в последнюю формулу:

$$\int \frac{dz}{\cos z} = \int \frac{\cos z dz}{1 - \sin^2 z} = \int \frac{d(\sin z)}{1 - \sin^2 z} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin z)}{1 - \sin z} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin z)}{1 + \sin z} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right).$$

Таким образом, получаем общее решение:

$$\ln \sqrt{\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}} + \ln x = C.$$

Возвращаемся к старой переменной y и окончательно находим общий интеграл исходного уравнения:

$$x \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin (y/x)}{1 - \sin (y/x)}} = C.$$

Если $\sin(y/x) = 1$, т. е. $y = (\pi/2 + 2\pi n)x$, то подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что эти функции являются решением. Итак, данное уравнение имеет бесконечно много особых решений:

$$y = \frac{4n+1}{2}\pi x, \quad n \in Z.$$

ЗАДАЧА 11

Решить задачу Коши для линейного уравнения 1-го порядка.

Таблица 11

1	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$; $y(0) = 0$	16	$y' + 2xy = x\sin x$; $y(0) = 0$
2	$y' + 2y = e^{3x}$; $y(0) = 0$	17	$y' - y\cos x = \sin 2x$; $y(0) = -1$
3	$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 1$; $y(\pi/4) = 1$	18	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$; $y(1) = 0$
4	$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$	19	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; $(0) = 0$
5	$y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = 1/4$	20	$y' - 4xy = -4x^3$; $y(0) = 0$
6	$y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$; $y(1) = 0$	21	$y' - \frac{y}{x} = x\sin x$; $(\pi/2) = 1$
7	$y' = \frac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$; $y(0) = 0$	22	$y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$; $y(1) = 0$
8	$y' + \frac{y}{x} = \sin x$; $y(\pi) = 1/\pi$	23	$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$; $y(1) = 1$
9	$y' + \frac{y}{x} = 3x$; $y(1) = 1$	24	$y' - \frac{y}{x} = 3x^2$; $y(3) = 0$
10	$y' + xy = -x^3$; $y(0) = 3$	25	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; $y(-3) = 0$
11	$y' = 3y + e^{2x} + x - 1$; $y(0) = 1$	26	$-y' + \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2}$; $y(1) = 0$
12	$y' + \operatorname{ctg} x \cdot y = 7$; $y(\pi/4) = 1$	27	$x^2y' - 3xy = -2x^2$; $y(1) = 1$
13	$y' + 5y = 3xe^{-x^2}$; $y(0) = 0$	28	$2x^2y' + 5xy = 7x^2$; $y(1) = 0$
14	$y' + y \cdot \sin x = \sin 2x$; $y(0) = 0$	29	$xy' + y = x \cdot \ln x$; $y(1) = 0$
15	$y' + 3xy = -x + x^2$; $y(0) = 0$	30	$y' - \frac{3y}{x+5} = (x+1)^3$; $y(0) = 0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 11

Найдем решение задачи Коши:

$$y' + \frac{y}{x+2} = e^{2x} + 2x + 1, \quad y(0) = 0.$$

Решение линейных уравнений проводят в два этапа. Сначала находят общее решение однородного уравнения:

$$y' + \frac{y}{x+2} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+2},$$

$$\ln|y| + \ln|x+2| = \ln C,$$

$$y = \frac{C}{x+2}.$$

На втором этапе ищут частное решение неоднородного уравнения. Для этой цели служит метод вариации постоянной C.

Сущность метода состоит в следующем. Будем искать частное решение в виде

$$y = \frac{C(x)}{x+2},$$

где $C(x)$ — неизвестная функция.

Осуществляя подстановку предполагаемого решения в исходное уравнения, находим:

$$\frac{C'}{x+2} - \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^2} = e^{2x} + 2x + 1,$$

$$C' = e^{2x}(x+2) + (2x+1)(x+2),$$

$$C(x) = \int e^{2x}(x+2)dx + \int (2x+1)(x+2)dx =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x+2) - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{(x+2)^2}{2}(2x+1) - \frac{(x+2)^3}{6} \cdot 2 =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{(x+2)^2}{2}\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right).$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения найдено:

$$y = \frac{C(x)}{x+2} = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(\frac{2x+3}{x+2}\right) + \frac{1}{6}(x+2)(4x-1).$$

Общее решение линейного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, т. е.

$$y=\frac{C}{x+2}+\frac{e^{2x}}{2}\cdot\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)+\frac{1}{6}(x+2)(4x-1).$$

Из начального условия $y(0)=0$ определяем постоянную C:

$$0=\frac{C}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3},\quad C=-\frac{5}{6}.$$

Решение задачи Коши найдено:

$$y=-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{e^{2x}}{2}\cdot\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)+\frac{1}{6}(x+2)(4x-1).$$

ЗАДАЧА 12

Проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах.

Таблица 12

1	$(5x+y^2)dx+(2xy-3y)dy=0$
2	$(x^2+2xy+x^2y+2x-1)dx+\left(2y+x^2+\frac{x^3}{3}+1\right)dy=0$
3	$(e^x+x\sin y)dx+\left(\sin y+\frac{x^2\cos y}{2}\right)dy=0$
4	$(\ln x-x\sin y)dx+\left(\ln y-\frac{x^2}{2}e^y\right)dy=0$
5	$(x^2+x-1-y^2+y)dx+(2y^3+y^2+x-2xy)dy=0$
6	$(\sin x+x\cos y)dx+\left(\cos y-\frac{x^2\sin y}{2}\right)dy=0$
7	$(2y+e^x-y\ln y)dx+x(1-\ln y)dy=0$
8	$(y^2e^x+y-\sin x)dx+(2ye^x+x)dy=0$
9	$(y\operatorname{tg}y+y^2+2y-5)dx+(2xy+2x-\ln(\cos x)+3)dy=0$
10	$(y\sin x+2xy-y)dx+(x^2-x-\cos x)dy=0$
11	$\left(-\cos y-\frac{y^2}{2}+x^2+x+1\right)dx+(x\sin y+y^2-xy+1)dy=0$

Продолжение табл. 12

12	$(\operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} x)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} + \operatorname{tg} y\right)dy = 0$
13	$(e^x + \ln x)dx + (xe^y + \ln y)dy = 0$
14	$(\operatorname{arctg} y + \arcsin x)dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + \arcsin y\right)dy = 0$
15	$\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln x\right)dx + \left(\frac{x^3y}{3} + e^y\right)dy = 0$
16	$\left(x\ln x - \frac{y}{1+x^2}\right)dx + (\operatorname{arctg} x + ye^y)dy = 0$
17	$\left(\frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right)dx + (\operatorname{arctg} x + \arcsin y)dy = 0$
18	$(ye^x + \ln x)dx + (e^x + \ln y)dy = 0$
19	$\left(\operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y)dy = 0$
20	$(y\sin x + x^2 - xy + 1)dx + \left(y^2 + y - \frac{x^2}{2} - \cos x\right)dy = 0$
21	$\left(\frac{x^2y^2}{2} - \sin x\right)dx + \left(\frac{x^3y}{3} + \cos y\right)dy = 0$
22	$(y^2 - y - \cos y)dx + (x\sin y + 2xy - x)dy = 0$
23	$(2xy + 2y - \ln(\cos y))dx + (x\operatorname{tg} y + x^2 + 2x - 5)dy = 0$
24	$(2xe^y + y)dx + (x^2e^y + x - \sin y)dy = 0$
25	$(y - y\ln x)dx + (2x + e^y - x\ln x)dy = 0$
26	$\left(\cos x - \frac{y^2}{2}\sin x\right)dx + (\sin y + y\cos x)dy = 0$
27	$(2x^3 + x^2 + y - 2xy)dx + (y^2 + y - 1 - x^2 - x)dy = 0$
28	$\left(\ln x - \frac{y^2}{2}e^x\right)dx + (\ln y - ye^x)dy = 0$
29	$\left(\sin x + \frac{y^2}{2}\cos x\right)dx + (e^y + y\sin x)dy = 0$
30	$(\sin x + y)dx + (x - \cos y)dy = 0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 12

Рассмотрим уравнение, записанное в дифференциальной форме:

$$(y^2\sin x - 2y + e^x)dx + (-2y\cos x - 2x + e^y)dy = 0.$$

В этом уравнении

$$P(x, y) = y^2\sin x - 2y + e^x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2y\sin x - 2,$$

$$Q(x, y) = -2y\cos x - 2x + e^y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\sin x - 2.$$

Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, левая часть заданного уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Определим эту функцию. Из равенства $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ следует, что

$$U = \int P dx + f(y) = \int (y^2\sin x - 2y + e^x)dx + f(y) =$$
$$= -y^2\cos x - 2xy + e^x + f(y).$$

Чтобы определить неизвестную функцию $f(y)$, воспользуемся другим равенством, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, и получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2y\cos x - 2x + \frac{df}{dy} = -2y\cos x - 2x + e^y.$$

Отсюда

$$\frac{df}{dy} = e^y \Rightarrow f(y) = e^y.$$

Таким образом, получаем общее решение исходного уравнения в виде $U(x, y) = C$, т. е.

$$e^x + e^y - y^2\cos x - 2xy = C.$$

ЗАДАЧА 13

Найти общее решение уравнения Эйлера.

Таблица 13

1	$x^2y'' - 8xy' + 14y = 0$	16	$3x^2y'' + 3xy' + 7y = 0$
2	$3x^2y'' - xy' + y = 0$	17	$5x^2y'' - xy' + y = 0$
3	$x^2y'' - 4xy' + 3y = 0$	18	$x^2y'' - 6xy' + 5y = 0$
4	$5x^2y'' - 9xy' - 3y = 0$	19	$x^2y'' - xy' - 4y = 0$
5	$3x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$	20	$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
6	$4x^2y'' + 4xy' - 9y = 0$	21	$5x^2y'' + 14xy' - 2y = 0$
7	$x^2y'' + xy' - 2y = 0$	22	$5x^2y'' + 5xy' + 7y = 0$
8	$x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$	23	$9x^2y'' + 9xy' + 4y = 0$
9	$4x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$	24	$4x^2y'' - 7xy' + 7y = 0$
10	$3x^2y'' - 4xy' + 2y = 0$	25	$-x^2y'' - xy' + 4y = 0$
11	$4x^2y'' - 12xy' + 3y = 0$	26	$x^2y'' + 7xy' - 9y = 0$
12	$9x^2y'' + 9xy' - 4y = 0$	27	$7x^2y'' + 7xy' - 9y = 0$
13	$2x^2y'' + 2xy' + 7y = 0$	28	$3x^2y'' - 14xy' + 10y = 0$
14	$2x^2y'' - 4xy' - 14y = 0$	29	$3x^2y'' + 23xy' - 7y = 0$
15	$5x^2y'' + 5xy' + 11y = 0$	30	$4x^2y'' + 4xy' + 9y = 0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 13

Решим уравнение Эйлера второго порядка:

$$4x^2y'' + 7xy' - 10y = 0.$$

Перейдем к новой независимой переменной t по формуле $x = e^t$, тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{de^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\dot{y},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(e^{-t}\dot{y})}{de^t} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}).$$

Исходное уравнение после этой замены преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$4\ddot{y} + 3\dot{y} - 10y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$4k^2 + 3k - 10 = 0$$

имеет два корня: $x_1 = -2$ и $x_2 = \frac{5}{4}$.

Следовательно,

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{\frac{5}{4}t}.$$

Возвращаемся к переменной $x = e^t$ и окончательно получаем

$$y(t) = C_1 e^{-2\ln x} + C_2 e^{\frac{5}{4}\ln x} = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^{\frac{5}{4}}.$$

ЗАДАЧА 14

Найти общее решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Таблица 14

1	$y''' - 3y'' + 4y = 0$	16	$y^{(IV)} - 7y''' + 17y'' - 17y' + 6y = 0$
2	$y^{(IV)} - 4y'' - 5y = 0$	17	$y''' - 2y'' - y' - 4y = 0$
3	$y^{(IV)} + 3y'' + 2y = 0$	18	$y''' - 7y'' + 5y' - 35y = 0$
4	$y''' - 5y'' - 2y' - 24y = 0$	19	$y''' - y'' - 4y' - 4y = 0$
5	$y^{(IV)} - 10y'' + \frac{1}{2}y' - 5y = 0$	20	$y''' + y'' + y' + y = 0$
6	$y^{(IV)} - 13y''' + 56y'' - 92y' + 48y = 0$	21	$2y^{(IV)} + 3y'' + y = 0$
7	$y''' - 9y'' + 23y' + 15y = 0$	22	$y^{(IV)} + 2y'' - 15y = 0$
8	$y^{(IV)} - 3y''' - 7y'' + 27y' - 18y = 0$	23	$y''' - 7y' + 6y = 0$
9	$y^{(IV)} + 8y'' + 15y = 0$	24	$y''' - 11y'' - y' + 11y = 0$
10	$y''' - 3y'' + 2y' + 6y = 0$	25	$y^{(IV)} + 13y'' + 36y = 0$
11	$y''' - 5y'' + 3y' - 15y = 0$	26	$y''' - 4y'' + 3y' + 12y = 0$
12	$y^{(IV)} - y'' - 12y = 0$	27	$y^{(IV)} - 7y'' + 12y = 0$
13	$y''' + 5y'' + y' + 5y = 0$	28	$y^{(IV)} - 2y''' - 8y'' + 18y' - 9y = 0$
14	$y^{(IV)} - 3y''' + y'' + 3y' - 2y = 0$	29	$y''' - 2y'' + 7y' - 14y = 0$
15	$y^{(IV)} - 3y'' + 2y = 0$	30	$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 14

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами четвертого порядка:

$$y^{(IV)} - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0,$$

которое раскладывается на множители:

$$(k-1)(k-2)(k^2+4) = 0.$$

Отсюда получаем корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -2i$, $k_4 = 2i$.

В соответствии с этим получаем общее решение заданного уравнения:

$$y(t) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

ЗАДАЧА 15

Решить задачу Коши для линейного уравнения второго порядка.

Таблица 15

1	$y'' + 2y' + y = xe^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$	10	$y'' + 7y' + 49y = e^{-7x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
2	$y'' - 3y' + 2y = x\sin^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$	11	$y'' + 25y = \sin x + \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$
3	$y'' + y' + y = (x+1)\sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$	12	$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + x + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$
4	$y'' + 7y' + 10y = x \cdot e^{-5x}$, $y(0) = y'(0) = 0$	13	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$
5	$y'' + 3y' + 3y = \cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$	14	$y'' + 16y = \sin 2x + \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
6	$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$	15	$y'' - 7y' + 12y = x\cos x + e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$
7	$y'' - 5y' + 4y = \sin^2 x$, $y(0) = y'(0) = 0$	16	$y'' - 2y' + y = (x-1)e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
8	$y'' + 4y = x\cos x + \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 2$	17	$y'' - 4y' + 3y = x \cdot \cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
9	$y'' + 6y' + 5y = \sin 2x + \cos 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$	18	$y'' + 2y' + 2y = 2x\cos 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$

Продолжение табл. 15

19	$y'' + 6y' + 8y = (x+1)e^{-4x}$, $y(0) = y'(0) = 0$	25	$y'' - 8y' + 64y = e^{8x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
20	$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$	26	$y'' + 6y' + 9y = xe^{x} + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$
21	$y'' - 6y' + 36y = e^{6x}$, $y(0) = y'(0) = 0$	27	$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 3x + 5$, $y(0) = y'(0) = 0$
22	$y'' + 5y' + 4y = \cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$	28	$y'' + y = \sin x + \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$
23	$y'' + 9y = (2x+1)\sin^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$	29	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
24	$y'' + 49y = \sin 2x + \cos 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$	30	$y'' - 9y' + 20y = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 15

Найдем решение задачи Коши:

$$y'' + 9y = x \cdot \cos^2 x,\ y(0) = y'(0) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 9 = 0,\ D = -36 < 0.$$

В этом случае общее решение однородного уравнения $y'' + 9y = 0$ представляется в виде:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольных постоянных. Напишем систему уравнений для неизвестных функций $C'_1(x)$, $C'_2(x)$:

$$\begin{cases} C'_1 \cos 3x + C'_2 \sin 3x = 0, \\ C'_1 \cdot (-3)\sin 3x + C'_2 \cdot 3\cos 3x = \dfrac{x}{2}(1 + \cos 2x). \end{cases}$$

Вычисления показывают, что

$$C'_1(x) = -\frac{x}{6}\sin 3x - \frac{x}{12}\sin 5x - \frac{x}{12}\sin x,$$

$$C'_2(x) = \frac{x}{6}\cos 3x + \frac{x}{12}\cos x + \frac{x}{12}\cos 5x.$$

После интегрирования определяем функции $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\frac{x}{6}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \frac{1}{54}\sin 3x - \frac{x}{12}\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) -$$
$$- \frac{1}{300}\sin 5x - \frac{x}{12}(-\cos x) - \frac{1}{12}\sin x,$$
$$C_2(x) = \frac{x}{6}\cdot\frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{54}\cos 3x + \frac{x}{12}\sin x -$$
$$- \frac{1}{12}\cos x + \frac{x}{12}\cdot\frac{\sin 5x}{5} - \frac{1}{300}\cos 5x.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения найдено:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x.$$

Определяем постоянные C_1, C_2 из начальных условий:

$$y(0) = 0 = C_1 + C_1(0), \text{ но } C_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$
$$y'(0) = 0 = C_1(-3\sin 3x) + C_2(3\cos 3x) + C_1(x)(-3\sin 3x) +$$
$$+ C_2(x)(3\cos 3x) + C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x\big|_{x=0} =$$
$$= C_2\cdot 3 + 3\cdot C_2(0) = 3\cdot C_2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{54} - \frac{1}{12} - \frac{1}{300}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{54} + \frac{1}{12} + \frac{1}{300} = \frac{2\cdot 5^2 + 5^2\cdot 3^2 + 3^2}{5^2\cdot 2^2\cdot 3^3} = \frac{284}{2700} = \frac{71}{675}.$$

Окончательно решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \frac{71}{675}\sin 3x + C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x.$$

ЗАДАЧА 16

Построить решение задачи Коши в виде степенного ряда. Найти радиус сходимости ряда.

Таблица 16

1	$(1 + 2x^2)y'' + 3xy' = 5y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$	4	$(5x^2 - 20)y'' - 5xy' - 3y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$
2	$(3 - 7x^2)y'' + 5xy' - 7y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$	5	$(3x^2 + 1)y'' - xy' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
3	$(12x^2 + 6)y'' - 3xy' - 2y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$	6	$(1 - 3x^2)y'' + 5xy' - 3y = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = 0$

Продолжение табл. 16

7	$(5x^2-8)y''-3xy'+12y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$	19	$(12x^2+1)y''-7xy'+2y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=0$
8	$(2+3x^2)y''-5xy'-7y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$	20	$(15x^2+3)y''-2xy'+5y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$
9	$(-1-3x^2)y''+17xy'+y=0$, $y(0)=10$, $y'(0)=0$	21	$(4x^2-8)y''-7xy'+5y=0$, $y(0)=\pi$, $y'(0)=0$
10	$(3x^2+7)y''-5xy'+3y=0$, $y(0)=-4$, $y'(0)=0$	22	$(12x^2-3)y''+5xy'+3y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$
11	$(2x^2+3)y''+4xy'+7y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$	23	$(15x^2+5)y''-7xy'+5y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$
12	$(5x^2+1)y''-3xy'+9y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$	24	$(-3+5x^2)y''-xy'+3y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$
13	$(4x^2+3)y''-2xy'+3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$	25	$(1-x^2)y''-2xy'+7y=0$, $y(0)=-\sqrt{3}$, $y'(0)=0$
14	$(7x^2+1)y''+3xy'+5y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$	26	$(7x^2+5)y''+3xy'-2y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$
15	$(9x^2+3)y''+5xy'+7y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$	27	$(10x^2+5)y''+4xy'-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$
16	$(5-2x^2)y''-4xy'+7y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$	28	$(-2x^2+1)y''+3xy'-10y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$
17	$(5x^2+1)y''-7xy'+y=0$, $y(0)=-\sqrt{2}$, $y'(0)=0$	29	$(3x^2+4)y''-2xy'-3y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$
18	$(1-x^2)y''-xy'+3y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$	30	$(1-16x^2)y''-8xy'-y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 16

Решим следующую задачу Коши:

$$(2x^2+5)y''-7x\cdot y'+3y=0,$$
$$y(0)=5;\ \ y'(0)=0.$$

Будем искать решение этой задачи в виде степенного ряда:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,\ \text{где}\ a_0=5,\ \ a_1=0.$$

Остальные коэффициенты ряда определим после подстановки предполагаемого решения в уравнение. Вычисления дают:

$$(2x^2+5)y'' = 10a_2 + 30a_3x +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} x^n(2a_n n(n-1) + 5a_{n+2}(n+2)(n+1)),$$

$$-7xy' = -7a_1x - 7\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n,$$

$$3y = 3a_0 + 3a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 3a_n x^n.$$

Складывая написанные три равенства, получаем результат подстановки ряда в исходное уравнение:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n(2n^2-9n+3) + 5a_{n+2}(n+2)(n+1))x^n +$$

$$+ 3a_0 + 10a_2 + (30a_3 - 4a_1)x = 0.$$

В силу начальных условий $a_0 = 5$, $a_1 = 0$. Для определения неизвестных a_n получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3a_0 + 10a_2 = 0, \\ 30a_3 - 4a_1 = 0, \\ a_n(2n^2-9n+3) + a_{n+2}5(n+2)(n+1) = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots). \end{cases}$$

Последовательно находим:

$$a_2 = -\frac{3}{10}a_0 = -\frac{3}{2},$$

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0 \ldots .$$

Четные коэффициенты a_n определяются из последнего уравнения:

$$a_{n+2} = -\frac{2n^2-9n+3}{5(n+2)(n+1)}a_n \quad (n = 2, 4, 6, \ldots).$$

Для нахождения радиуса сходимости ряда можно использовать формулу

$$R^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+2)(n+1)}{2n^2-9n+3} = \frac{5}{2}, \quad \text{отсюда} \quad R = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

ЗАДАЧА 17

Решить задачу Коши с помощью преобразования Лапласа.

Таблица 17

1	$\dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y,$ $\dot{y} = x + y,$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0$	10	$\dot{x} = 7x - 5y,$ $\dot{y} = x + 3y,$ $x(0) = y(0) = -1$
2	$\dot{x} = x + 8y,$ $\dot{y} = -\frac{1}{16}x + 2y,$ $x(0) = y(0) = -1$	11	$\dot{x} = 4x + y,$ $\dot{y} = -5x + 8y,$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 0$
3	$\dot{x} = 5x + y,$ $\dot{y} = -x + 5y,$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -2$	12	$\dot{x} = 5x - 4y,$ $\dot{y} = x + 5y,$ $x(0) = y(0) = -1$
4	$\dot{x} = 2x + 2y,$ $\dot{y} = -x + 4y,$ $x(0) = -2, \quad y(0) = 3$	13	$\dot{x} = 7x + y,$ $\dot{y} = -4x + 7y,$ $x(0) = y(0) = -2$
5	$\dot{x} = 5x - y,$ $\dot{y} = 2x + 3y,$ $x(0) = y(0) = 5$	14	$\dot{x} = 9x - 4y,$ $\dot{y} = x + 9y,$ $x(0) = y(0) = -5$
6	$\dot{x} = 3x - \frac{1}{4}y,$ $\dot{y} = 9x + 3y,$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5$	15	$\dot{x} = 3x + \frac{1}{4}y,$ $\dot{y} = -5x + y,$ $x(0) = y(0) = -6$
7	$\dot{x} = x + y,$ $\dot{y} = -4x + y,$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 5$	16	$\dot{x} = 3x - y,$ $\dot{y} = \frac{1}{4}x + 3y,$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0$
8	$\dot{x} = x - 13y,$ $\dot{y} = \frac{1}{2}x + 2y,$ $x(0) = y(0) = 1$	17	$\dot{x} = 3x + y,$ $\dot{y} = -\frac{1}{2}x + 4y,$ $x(0) = y(0) = 1$
9	$\dot{x} = 9x - 5y,$ $\dot{y} = x + 5y,$ $x(0) = y(0) = 2$	18	$\dot{x} = 6x - y,$ $\dot{y} = x + 6y,$ $x(0) = y(0) = 1$

Продолжение табл. 17

19	$\dot{x} = 4x - y,$ $\dot{y} = 2x + 2y,$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1$	25	$\dot{x} = 5x + y,$ $\dot{y} = -5x + y,$ $x(0) = y(0) = 1$
20	$\dot{x} = 6x + 5y,$ $\dot{y} = -\frac{1}{2}x + 5y,$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 2$	26	$\dot{x} = 3x - y,$ $\dot{y} = 5x + 7y,$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -5$
21	$\dot{x} = 2x - 4y,$ $\dot{y} = x + 2y,$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 2$	27	$\dot{x} = 4x + 2y,$ $\dot{y} = -2x + 4y,$ $x(0) = y(0) = -3$
22	$\dot{x} = 5x + 5y,$ $\dot{y} = -x + 3y,$ $x(0) = y(0) = 2$	28	$\dot{x} = 2x - 2y,$ $\dot{y} = 2x + 2y,$ $x(0) = y(0) = -2$
23	$\dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y,$ $\dot{y} = -13x + 3y,$ $x(0) = y(0) = 3$	29	$\dot{x} = 8x - 2y,$ $\dot{y} = 2x + 8y,$ $x(0) = y(0) = -4$
24	$\dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y,$ $\dot{y} = -13x + y,$ $x(0) = y(0) = 6$	30	$\dot{x} = 5x - 5y,$ $\dot{y} = \frac{1}{4}x + 3y,$ $x(0) = y(0) = -7$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 17

Решим с помощью преобразования Лапласа задачу Коши:

$$\dot{x} = 3x - \frac{1}{2}y,$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}x + 3y,$$

$$x(0) = y(0) = -1.$$

Прежде всего, напишем линейную систему для образов:

$$pX + 1 = 3X - \frac{1}{2}Y,$$

$$pY + 1 = \frac{1}{2}X + 3Y.$$

Запишем эту систему в стандартном виде:

$$(3-p)X-\frac{1}{2}Y=1,\quad \frac{1}{2}X+(3-p)Y=1.$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$X=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 3-p\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3-p & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 3-p\end{vmatrix}}=\frac{\frac{7}{2}-p}{(3-p)^2+\frac{1}{4}},$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}3-p & 1\\ \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3-p & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 3-p\end{vmatrix}}=\frac{\frac{5}{2}-p}{(3-p)^2+\frac{1}{4}}.$$

Функции X, Y имеют простые полюсы $p=3\pm i/2$.

Искомое решение получаем по формулам обращения:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}X(p)e^{pt}dp,$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}Y(p)e^{pt}dp,\quad \text{где } a>3.$$

Написанные интегралы без труда вычисляются с помощью теоремы о вычетах. Проведем соответствующие вычисления:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{(7/2-p)e^{pt}dp}{(p-3-i/2)(p-3+i/2)}=$$

$$=\frac{7/2-3-i/2}{i}e^{(3+i/2)t}+\frac{7/2-3+i/2}{-i}e^{(3-i/2)t}=$$

$$=e^{3t}\left((-1/2-i/2)e^{\frac{i}{2}t}+(-1/2+i/2)e^{-\frac{i}{2}t}\right)=$$

$$=\sqrt{2}e^{3t}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{t}{2}\right).$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{(5/2-p)e^{pt}dp}{(p-3-i/2)(p-3+i/2)}=$$

$$=\frac{-1/2-i/2}{i}e^{(3+i/2)t}+\frac{-1/2+i/2}{-i}e^{(3-i/2)t}=$$

$$=e^{3t}\left((-1/2+i/2)e^{\frac{i}{2}t}+(-1/2-i/2)e^{-\frac{i}{2}t}\right)=$$

$$=\sqrt{2}e^{3t}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{t}{2}\right).$$

ЗАДАЧА 18

Исследовать на устойчивость системы ОДУ.

Таблица 18

1	$\frac{dx}{dt}=-4x,\quad \frac{dy}{dt}=-2y$	12	$\frac{dx}{dt}=-x-9y,\quad \frac{dy}{dt}=x+y$
2	$\frac{dx}{dt}=-8y,\quad \frac{dy}{dt}=8x$	13	$\frac{dx}{dt}=-2x-2y,\quad \frac{dy}{dt}=3x-3y$
3	$\frac{dx}{dt}=10x,\quad \frac{dy}{dt}=10y$	14	$\frac{dx}{dt}=x+y,\quad \frac{dy}{dt}=4x+4y$
4	$\frac{dx}{dt}=8x+2,\quad \frac{dy}{dt}=2x+2y$	15	$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-5x-25y$
5	$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=3y$	16	$\frac{dx}{dt}=-9x-y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+y$
6	$\frac{dx}{dt}=-9x+6y,\quad \frac{dy}{dt}=3-12y$	17	$\frac{dx}{dt}=-x-9y,\quad \frac{dy}{dt}=x+y$
7	$\frac{dx}{dt}=-4+8y,\quad \frac{dy}{dt}=4x+4y$	18	$\frac{dx}{dt}=-5x,\quad \frac{dy}{dt}=x-3y$
8	$\frac{dx}{dt}=-15x+10y,\quad \frac{dy}{dt}=5-20y$	19	$\frac{dx}{dt}=10y,\quad \frac{dy}{dt}=-y$
9	$\frac{dx}{dt}=-6x+12y,\quad \frac{dy}{dt}=x+y$	20	$\frac{dx}{dt}=4x+4y,\quad \frac{dy}{dt}=5x-5y$
10	$\frac{dx}{dt}=-x-10y,\quad \frac{dy}{dt}=x-y$	21	$\frac{dx}{dt}=-x,\quad \frac{dy}{dt}=-y$
11	$\frac{dx}{dt}=x-8y,\quad \frac{dy}{dt}=x-y$	22	$\frac{dx}{dt}=9y,\quad \frac{dy}{dt}=2x-y$

Продолжение табл. 18

23	$\frac{dx}{dt} = x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 4y$	27	$\frac{dx}{dt} = -2x - 11y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y$
24	$\frac{dx}{dt} = 20x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y$	28	$\frac{dx}{dt} = 5x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y$
25	$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 5y$	29	$\frac{dx}{dt} = -4x - 22y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y$
26	$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = x - 7y$	30	$\frac{dx}{dt} = -2y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 18

Исследуем на устойчивость систему:

$$\dot{x} = 2x + y,$$
$$\dot{y} = 3x + 4y.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

Корни вещественные, различные и положительные. Точка покоя — неустойчивый узел.

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 1

1.31. 10. **1.32.** $\frac{\pi}{12}$. **1.33.** $\frac{1}{4}$. **1.34.** 2π.

1.35. $\Omega = \{(x, y):\ x \in [0, 2] \wedge x \leqslant y \leqslant x + 5\}$.

1.36. $\Omega = \left\{(x, y):\ 2 - y \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2} \wedge y \in [0, 2]\right\}$.

1.37. $\Omega = \left\{(x, y):\ x \in [1, 2] \wedge \sqrt{x} \leqslant y \leqslant x^3\right\}$.

1.38. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x, y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y)dy.$

1.39. $\int\limits_{0}^{2} dy \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)dx - \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx \right) + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)dy.$

1.40. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{3\sqrt{x}} f(x, y)dy.$ **1.41.** $\int\limits_{0}^{\frac{8}{3}} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x, y)dx.$

1.42. $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x, y)dx.$ **1.43.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)dx.$

1.44. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x, y)dx.$

1.45. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$

1.46. $\frac{112}{9}$. **1.47.** $\frac{9}{20}$. **1.48.** $\frac{\pi^2}{32}$. **1.49.** $\frac{4}{3}|a|^3$. **1.50.** $3\pi^2a^3$.

1.51. $\frac{\pi^2}{16}$. **1.52.** $\frac{a^2}{4}$. **1.53.** $a\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)\sqrt{2}$. **1.54.** $\frac{128}{3}\pi$.

1.55. $\frac{\pi a}{2}$. **1.56.** $\frac{45}{32}\pi a^4$. **1.57.** $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$.

1.58. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)dr = \frac{\pi}{12}\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} rf(r)dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)dr.$

1.59. $2\pi\int\limits_{0}^{1} rf(r)dr$. **1.60.** $\pi\int\limits_{0}^{1} rf(r)dr + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\left(\pi-\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)dr.$

1.61. $\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\cos^2\varphi d\varphi$. **1.62.** $\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} du \int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)dv.$

1.63. $4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v\cdot\cos^2 v dv \int\limits_{0}^{a} uf(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)du.$

1.64. $\ln 2\int\limits_{1}^{2} f(u)du$. **1.65.** $\frac{2}{3}\pi ab$. **1.66.** $\frac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2)$.

1.67. $(\pi-1)a^2$. **1.68.** $\frac{a^2}{210}$. **1.69.** $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$. **1.70.** $\frac{65}{108}ab$.

1.71. $\frac{189}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{12}{25}\right)ab$. **1.72.** $\frac{ab}{3}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right)$.

1.73. $\frac{1}{1260}\cdot\frac{a^5b^5}{c^5}$. **1.74.** $\frac{ab}{70}$. **1.75.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}a^2$.

1.76. $4\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$. **1.77.** $\frac{\pi}{6}$. **1.78.** $2a^2\left(\pi+4-4\sqrt{2}\right)$.

1.79. $\frac{4}{3}a^3\left(2-\sqrt{2}\right)$. 1.80. $\frac{a^3}{2}$. 1.81. $\frac{2}{3}\pi abc\left(2-\sqrt{2}\right)$.

1.82. $\frac{1}{2}\ln 3$. 1.83. $\frac{9}{8}$. 1.84. $\frac{a^4}{8}$. 1.85. $\frac{45}{32}\pi$. 1.86. $\frac{16}{9}a^3$.

1.87. $\frac{\pi a^3}{8}$. 1.88. $\pi(1-e^{-R^2})$. 1.89. $\frac{\pi}{8}$. 1.90. $\frac{\pi}{8}$. 1.91. $\frac{ab^2}{6}$.

1.92. $M=\frac{\pi}{2}R^4$. 1.93. $M_x=0,\ M_y=\frac{5}{4}\pi a^3$.

1.94. $x_C=\frac{141a}{20(7-3\ln 2)},\ y_C=\frac{81a}{8(7-3\ln 2)}$.

1.95. $x_c=y_c=\frac{a}{5}$. 1.96. $x_c=y_c=\frac{\pi}{8}a$. 1.97. $x_c=y_c=\frac{256}{315}\cdot\frac{a}{\pi}$.

1.98. $x_c=y_c=\frac{128}{105}\cdot\frac{a}{\pi}$. 1.99. $I_x=\frac{1}{12},\ I_y=\frac{7}{12}$.

1.100. $I_x=\frac{125}{12},\ I_y=\frac{185}{12}$. 1.101. $I_x=I_y=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$.

1.102. $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. 1.103. $I_x=I_y=\frac{9}{8}a^4$. 1.104. $\frac{a^4}{12}$.

1.105. $\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} dy\int\limits_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}y} f(x,y,z)dz$.

1.106. $\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\int\limits_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y,z)dz$.

1.107. $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{-2}^{2}dz\int\limits_{-\sqrt{8-2z^2}}^{\sqrt{8-2z^2}}dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}}^{2} f(x,y,z)dx$.

1.108. $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$.

1.109. $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz.$

1.110. $\frac{2048}{45}$. 1.111. $\frac{1}{48}$. 1.112. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. 1.113. $\frac{\pi}{6}$.

1.114. $\frac{a^4}{8}$. 1.115. $\frac{16\pi}{3}$. 1.116. $\frac{\pi}{10}$. 1.117. $\frac{\pi^2 abc}{4}$.

1.118. $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\cdot(b^8-a^8)\cdot\left[(\beta^2-\alpha^2)\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$.

1.119. а) $\frac{6}{5}$; б) $3(e-2)$. 1.120. $\frac{7}{24}$. 1.121. $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$.

1.122. $\frac{\pi}{6}$. 1.123. $\frac{32}{3}\pi$. 1.124. $\frac{3}{35}$. 1.125. $\frac{1}{45}$. 1.126. $\frac{\pi^2}{4}abc$.

1.127. $\frac{19}{6}\pi a^3$. 1.128. $\frac{\pi}{3}$. 1.129. $\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot(b^3-a^3)$.

1.130. $\frac{9}{4}a^2$. 1.131. $\frac{abc}{1680}$. 1.132. $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$. 1.133. $\frac{\pi k}{5}$.

1.134. $\frac{\pi k}{24}$. 1.135. $\frac{124}{5}\pi k$. 1.136. $X_C = Y_C = 0$, $Z_C = \frac{3}{4}$.

1.137. $X_C = Y_C = \frac{2}{5}$, $Z_C = \frac{7}{30}$. 1.138. $X_C = \frac{7}{9}$, $Y_C = 0$, $Z_C = \frac{7}{88}$.

1.139. $X_C = \frac{3}{8}a$, $Y_C = \frac{3}{8}b$, $Z_C = \frac{3}{8}c$.

1.140. $X_C = Y_C = 0$, $Z_C = \frac{3}{8}$. 1.141. $X_C = Y_C = 1$, $Z_C = \frac{5}{3}$.

1.142. $X_C = Y_C = 0$, $Z_C = \frac{7}{20}$. 1.143. $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = \frac{1}{60}$.

1.144. $I_{xy} = \frac{\pi ab}{5}$, $I_{yz} = \frac{\pi a^3 b}{20}$, $I_{xz} = \frac{\pi ab^3}{20}$.

1.145. $I_{xy} = \frac{2ab}{225}(15\pi-16)$, $I_{xz} = \frac{2ab^2}{1575}(105\pi-272)$,
$I_{yz} = \frac{2a^3 b}{1575}(105\pi-92)$.

1.146. $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi$, $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi$, $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi$.

1.147. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p>q>1$. **1.148.** $\frac{1}{p-1}$, $p>1$.

1.149. $\frac{\pi}{p-1}$, $p>1$. **1.150.** $\pi\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$. **1.151.** $\frac{1}{2}$.

1.152. π. **1.153.** $\frac{\pi}{2}$. **1.154.** $\frac{\pi}{2}$. **1.155.** Сходится при $p<1$.

1.156. Сходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. **1.157.** Сходится при $p<1$.

1.158. Сходится при $p<1$. **1.159.** Сходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$.
1.160. Сходится при $p<1$.

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 2

2.30. $1+\sqrt{2}$. **2.31.** $\frac{256}{15}$. **2.32.** $\frac{1}{6}\left[\left(\frac{e^2+e^{-2}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. **2.33.** 4.

2.34. 8. **2.35.** $\frac{56\pi}{3}\sqrt{9+\frac{1}{4\pi^2}}$. **2.36.** $\frac{2\pi}{3}$.

2.37. а) 5; б) $\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2.38.** $2\left(2+9\frac{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}}\right)$.

2.39. $\frac{8}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **2.40.** $\frac{3}{4}\left[\left(3\sqrt{3}-1\right)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

2.41. $X_C=2\left(1-\sqrt{\frac{h-2}{h+2}}\right)$, $Y_C=\frac{h}{2}+\frac{2}{\sqrt{h^2-4}}$, где $h=e+\frac{1}{e}$.

2.42. $X_C=Y_C=\frac{4}{3}$. **2.43.** $X_C=Y_C=Z_C=\frac{4}{3}-\frac{a}{\pi}$.

2.44. $X_C=\frac{2}{5}$, $Y_C=-\frac{1}{5}$, $Z_C=\frac{1}{2}$.

2.45. а) $-\frac{14}{15}$; б) 0; в) -2π; г) -2π; д) 0; е) 0.

2.46. а) 8; б) 12; в) $-\frac{3}{2}$; г) 9; д) 1; е) $\pi+1$.

2.47. а) $U=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$; б) $U=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$;
в) $U=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$.

2.48. а) $\frac{1}{35}$; б) 0; в) -4. **2.49.** а) $-53\frac{7}{12}$; б) 0.

2.50. а) $U=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz+C$; б) $U=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$.

2.51. а) $\frac{3}{4}+e^4-12e^{-2}$; б) $8\frac{20}{21}\ln 2$.

2.52. А. 1) 0, 2) 2π; Б. 1) 2π, 2) 2π.

2.53. а) $-46\frac{2}{3}$; б) 8π; в) $-2\pi ab$; г) $\frac{1-e^{\pi}}{5}$; д) 0. **2.54.** 2π.

2.55. а) πab; б) $\frac{3}{8}\pi ab$; в) $\frac{a^2}{6}$; г) $\frac{3}{2}a^2$; д) a^2. **2.56.** $2\pi R^2$.

2.57. $\operatorname{div}\vec{F}(x_0,y_0)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_{x=x_0,\,y=y_0}$.

2.58. а) π; б) $\frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$; в) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}-1\right)\ln 2$;
г) $\frac{125\sqrt{5}-1}{1680}$; д) $\frac{\sqrt{3}\pi}{8}$; е) $\frac{64}{15}\sqrt{2}$.

2.59. $\frac{2\pi\left(1+6\sqrt{3}\right)}{15}$. **2.60.** π. **2.61.** $X_c=1$, $Y_c=0$; $Z_C=\frac{32}{9\pi}$.

2.62. $X_C=Y_C=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $Z_C=\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{2}+1\right)$. **2.63.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

2.64. а) 4π; б) 0; в) 24π; г) 0; д) $\frac{\pi}{3}$; е) 0; ж) πR^4; з) 0.

2.65. $-\pi a^2\sqrt{3}$. **2.66.** $\frac{3\pi}{2}$. **2.67.** $\frac{1}{3}$. **2.68.** $\frac{1}{6}$. **2.69.** $-\frac{9}{2}$.

2.74. $2\pi^2a^2b$.

2.75. а) 3; б) $-\frac{12\pi}{5}$; в) $\frac{R^5}{3}$; г) $\frac{\pi R^4 H}{2}$; д) $-\pi R^3$.

2.76. $-\frac{\pi H^4}{2}$.

2.78. а) $\operatorname{div}\vec{C}\varphi = \vec{C}\cdot\operatorname{grad}\varphi$; $\operatorname{div}\vec{F}\varphi = \varphi\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\operatorname{grad}\varphi$;

б) $\operatorname{rot}\vec{C}\varphi = \operatorname{grad}\varphi\times\vec{C}$; $\operatorname{rot}(\vec{F}\cdot\varphi) = \varphi\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\varphi\times\vec{F}$;

$\operatorname{rot}(\vec{F_1}\times\vec{F_2}) = (\vec{F_2}\cdot\nabla)\vec{F_1} - (\vec{F_1}\cdot\nabla)\vec{F_2} + \vec{F_1}\operatorname{div}\vec{F_2} - \vec{F_2}\operatorname{div}\vec{F_1}$.

2.79. $6x\vec{i} + 6y\vec{j} + 6z\vec{k}$. **2.80.** 0. **2.81.** $4x\vec{i} + 4y\vec{j} + 4z\vec{k}$.

2.82. а) $\vec{A} = (x^3z - xy^2z,\ -x^2yz - y^3z,\ 0) + \operatorname{grad}\varphi(x, y, z)$;

б) $\vec{A} = (x^2yz,\ -xy^2z,\ 0) + \operatorname{grad}\varphi(x, y, z)$, где $\varphi(x, y, z)$ — произвольное гладкое скалярное поле.

2.83. а) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$; б) $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\overline{e_z}}{r}$;

в) $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

2.84. а) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{2}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\overline{e_\varphi}}{2}$;

б) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{2}{r}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\overline{e_r} - \frac{\overline{e_\theta}}{2}$.

2.85. $\vec{F} = rz(\overline{e_r} - \overline{e_z})$, $\operatorname{div}\vec{F} = 2z - r$, $\operatorname{rot}\vec{F} = (r + z)\overline{e_\varphi}$.

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 3

3.47. Во всех ответах $k \in \mathbb{Z}$:

а) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; б) $|z| = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$;

в) $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ или $\varphi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$;

г) $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ или $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$;

д) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$;

е) $|z| = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ или $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$;

ж) $|z|=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

3.49. а) i; б) $\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; в) i; г) $2^{79}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

3.50. а) $3(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$, $3e^{2k\pi i}$;

б) $5(\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi)$, $5e^{(2k+1)\pi}$;

в) $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$, $4e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$;

г) $\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, $\sqrt{6}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)i}$;

д) $\sqrt{2(1-\sin\beta)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}+2k\pi\right)\right)$,
$\sqrt{2(1-\sin\beta)}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+2k\pi\right)i}$;

е) $(\cos(\gamma+2k\pi)+i\sin(\gamma+2k\pi))$, $e^{(\gamma+2k\pi)i}$;

ж) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi\right)\right)$, $e^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi\right)i}$.

3.51. $\sin(4\varphi)=4\sin\varphi\cos^3\varphi-4\sin^3\varphi\cos\varphi$,
$\cos(4\varphi)=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$.

3.52. а) $\cos\frac{\pi+4k\pi}{10}+i\sin\frac{\pi+4k\pi}{10}$, $k=0,1,2,3,4$;

б) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$;

в) $5\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+k\pi\right)\right)$, $k=0,1$;

г) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$;

д) $\left(\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)$, $k=0,1,2$
или $\cos\frac{3\pi+4k\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi+4k\pi}{6}$.

3.53. а) часть плоскости вне круга радиуса 2 с центром в точке с декартовыми координатами (0; 3), включая точки окружности $x^2 + (y-3)^2 = 4$;

б) часть плоскости вне гиперболы $y^2 - \frac{8}{9}x^2 - \frac{23}{3}x = \frac{589}{36}$;

в) полуплоскость $x > -2$;

г) полуплоскость $y \leqslant 1$;

д) полуплоскость $x \leqslant -\frac{1}{2}$ без точки $x = -2$;

е) точки с декартовыми координатами (0; 2) и (0; −2);

ж) часть плоскости, заключенной между прямыми $x = 0$ и $y = -2 - x\sqrt{3}$.

3.55. а) $\theta = 0$, $k = 4$; б) $\theta = \pi$, $k = 4$;

в) $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $k = 8\sqrt{2}$; г) $\theta = \pi$, $k = 32$.

3.56. а) сжатие внутри круга $|z| < \frac{1}{2}$, растяжение вне круга $|z| > \frac{1}{2}$;

б) сжатие внутри круга $|z-1| < \frac{1}{2}$, растяжение вне круга $|z-1| > \frac{1}{2}$;

в) сжатие вне круга $|z| > 1$, растяжение внутри круга $|z| < 1$.

3.57. а), б), в), г) — выполняются; д), е), ж), з) — нет.

3.58. а) нет; б), в) да. **3.59.** нет. **3.61.** $f(z) = z^2 + 2iz$.

3.62. $f(z) = 5^z + C$. **3.63.** $5(43 + 15i)$. **3.64.** 0.

3.65. а) 5; б) $2 - 3i$; в) $5 + 3i$. **3.66.** 0. **3.67.** $-\frac{i}{3}(1 + e^{-3\pi})$.

3.68. $-\frac{13}{6} - \frac{16}{3}i$. **3.69.** $3\cos i + 2i\sin i - 2$. **3.70.** $\frac{1}{5}\ln^5(1+i)$.

3.71. а) $2\pi i \cos i$ или $2\pi i \operatorname{ch} 1$; б) $-2\pi i \sin i$ или $2\pi \operatorname{sh} 1$; в) $\frac{\pi i}{3}e^i$.

3.72. а) $-54\pi i$; б) 0. **3.73.** 0. **3.74.** $-\pi e^{9i}\frac{17+6i}{432}$.

3.75. $-\frac{\pi i}{216}(17\sin 9 + 6\cos 9)$. **3.76.** $\frac{3}{i}\sum_{k=0}^{+\infty} i^k (z-i)^k$.

3.77. $(z-1)^0 + 4(z-1) + 6(z-1)^2 + 4(z-1)^3 + 1(z-1)^4 + \sum_{k=5}^{+\infty} 0 \cdot (z-1)^k$.

3.78. $\dfrac{1\cdot(z-i)^1}{1!}+\dfrac{2\cdot(z-i)^3}{3!}+\dfrac{16\cdot(z-i)^5}{5!}+\dfrac{272\cdot(z-i)^7}{7!}+\dfrac{7936\cdot(z-i)^7}{9!}+\ldots$.

3.79. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}\sin\left(-3i+4+\dfrac{\pi n}{2}\right)(z+i)^n$, $R=+\infty$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{3^k(2z+1)^k}{k!2^k}$, $R=+\infty$; в) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-2^{-k})z^k$, $R=1$;

г) $\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{z^k}{2^k k}$, $R=2$;

д) $16(z-2i)^0-32i(z-2i)^1-24(z-2i)^2+8i(z-2i)^3+$

$+(z-2i)^4+\sum\limits_{k=5}^{+\infty}0\cdot(z-2i)^k$, $R=+\infty$.

3.80. а) $|z|<1$; б) $|z-2i|>2$; в) $\mathbb{C}$; г) $1<|z|<3$;

д) $z\in\varnothing$; е) $\dfrac{1}{2}<|z|<1$.

3.81. а) $-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{3^{k+1}}$; б) $\dfrac{1}{z-3}-\sum\limits_{k=0}^{+\infty}z^{-k-1}$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{2^k}{(z-1)^{k+1}}-\dfrac{1}{z-1}$; г) $-\dfrac{1}{z-1}-\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z-1)^k}{2^{k+1}}$.

3.82. а) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{k+3}$; б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2-k}$.

3.83. Показать, что верно следующее разложение функции $\sin^2 z$ в ряд Маклорена:

$$\sin^2 z=z^2-\frac{1}{3}z^4+\sum_{j=3}^{+\infty}(-1)^{j+1}\left\{\frac{2}{(2j-1)!}+\sum_{i=0}^{j-3}\frac{1}{(2i+3)!(2j-2i-3)!}\right\}z^{2j}.$$

Откуда:

$$f(z)=2-\frac{2}{3}z^2+2\sum_{j=3}^{+\infty}(-1)^{j+1}\left\{\frac{2}{(2j-1)!}+\sum_{i=0}^{j-3}\frac{1}{(2i+3)!(2j-2i-3)!}\right\}z^{2j-2},$$

причем ясно видно, что $f(0)=2$.

3.84. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^k\ln^k 3}{|k|!}z^k+\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}\dfrac{2^k\ln^{-k}3}{|k|!}z^k-3$.

3.85. $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3^{2k-1}z^{2k-6}}{(2k-1)!}$. **3.86.** $3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 7^k z^{-k-1}}{4^{k+1}}$. **3.87.** $\frac{102}{13}i$.

3.88. а) $\frac{\pi}{3}i$; б) $-5\pi i$; в) $-2\pi i$. **3.89.** $\frac{\pi}{10}i$. **3.90.** $-\pi i$.

3.91. $2\pi i$. **3.92.** $4\pi i$. **3.93.** 0. **3.94.** а) $\bar{f}(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}$;

б) $\bar{f}(p)=\frac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^2-2p+5)}$; в) $\bar{f}(p)=\frac{p}{p^2-a^2}$;

г) $\bar{f}(p)=\frac{a(p^2-a^2-b^2)}{(p^2-a^2-b^2)^2+4p^2b^2}$;

д) $\bar{f}(p)=\frac{b(p^2+a^2+b^2)}{(p^2-a^2-b^2)^2+4p^2b^2}$;

е) $\bar{f}(p)=\frac{p(p^2-a^2+b^2)}{(p^2-a^2-b^2)^2+4p^2b^2}$;

ж) $\bar{f}(p)=\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$. **3.95.** а) $\bar{F}(p)=(1-2p)\bar{y}(p)$;

б) $\bar{F}(p)=(p^3-p^2+2p-2)\bar{y}(p)-p-1$;

в) $\bar{F}(x,p)=p\bar{T}(x,p)-T(x,0)-a\frac{d^2T(x,p)}{dx^2}$;

г) $\bar{F}(p)=\frac{p^2-1}{p}\bar{y}(p)$.

3.96. а) $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{12}\cos 2t$;

б) $f(t)=-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{12}e^{-2t}$; в) $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$;

г) $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{\operatorname{ch}t}{3}+\frac{\operatorname{ch}2t}{12}$.

3.97. $f(t)=\int_0^t\cos(t-\tau)\cos\tau d\tau=\frac{\sin t+t\cos t}{2}$.

3.98. $t*\cos t=1-\cos t\doteq\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p^2}\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$.

3.99. а) $y(t)=e^{2t}$; б) $y(t)=\operatorname{sh} t$; в) $y(t)=0$;

г) $y(t)=\dfrac{te^t}{3}+\dfrac{2e^t}{9}+\dfrac{7}{9}e^{-2t}$; д) $y(t)=-\dfrac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\dfrac{3}{2}e^{3t}$.

3.100. а) $\begin{cases} x(t)=\dfrac{5e^{2t}-e^{-2t}}{2}, \\ y(t)=\dfrac{5e^{2t}+e^{-2t}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(t)=\operatorname{ch}\sqrt{17}t+\dfrac{5\sqrt{17}}{17}\operatorname{sh}\sqrt{17}t, \\ y(t)=\operatorname{ch}\sqrt{17}t+\dfrac{\sqrt{17}}{17}\operatorname{sh}\sqrt{17}t. \end{cases}$

3.101. а) $y(t)=1$; б) $y(t)=t$.

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 4

4.4. Общее решение: $(x+3)(y-2)=C$, решение задачи Коши: $(x+3)(y-2)=12$.

4.5. Общее решение: $y=\dfrac{1+C\cos^2 x}{2}$, решение задачи Коши: $y=\dfrac{1+28\cos^2 x}{2}$.

4.6. Общее решение: $\operatorname{arctg} x=\ln\left(C\sqrt{1+y^2}\right)$, решение задачи Коши: $\operatorname{arctg} x=\ln\left(\sqrt{1+y^2}\right)$.

4.7. Общее решение: $\ln x \ln y=C$, решение задачи Коши: $\ln x \ln y=1$.

4.8. Общее решение: $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C$, решение задачи Коши: $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=2$.

4.9. Общее решение: $(1+x^2)(1+y^2)=C$, решение задачи Коши: $(1+x^2)(1+y^2)=1$.

4.10. Общее решение: $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$, решение задачи Коши: $y=\sqrt{1+e^{2x}}$.

4.11. Общее решение: $\cos y=C\cos x$, решение задачи Коши: $\cos y=\cos x$.

4.12. Общее решение: $e^x(1+e^y)=C$, решение задачи Коши: $e^x(1+e^y)=2$.

4.13. Общее решение: $y=\sin(\ln(1+x^2)+C)$.

4.14. Общее решение: $\ln|y|=x-\ln|x|+C$, решение задачи Коши: $\ln|y|=x-\ln|x|-1$.

4.15. Общее решение: $x^2+y^2=\ln(Cx^2)$, решение задачи Коши: $x^2+y^2=\ln(ex^2)$.

4.16. Общее решение: $8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x + C)$.

4.17. Общее решение: $x + 2y + 3\ln|2x + 3y - 7| = C$, решение задачи Коши: $x + 2y + 3\ln|2x + 3y - 7| = 5$.

4.23. $y = -\dfrac{1}{\ln(C|x|)}$.

4.24. $y^2 = x^2 - Cx$.

4.25. $x - 2y - 5\ln|x - y + 5| = C$.

4.26. $y^2 - 2Cx = C^2$.

4.27. Общее решение: $x = y(C - \ln|y|)$, решение задачи Коши: $x = -y(1 = \ln|y|)$.

4.28. Общее решение: $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-3}\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = Cx$, решение задачи Коши: $3y^3 = 8(x^2 - y^2)$.

4.29. Общие решения: $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = Cx$, $y = 0$, решение задачи Коши: $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = x$.

4.30. Общее решение: $y^2 = 2x^2\ln|x| + Cx^2$, решение задачи Коши: $y^2 = 2x^2\ln|x| + x^2$.

4.31. Общее решение: $y^3 = x\ln(Cy^2)$.

4.32. Общее решение: $\ln(C(x^2 + y^2)) = 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y^3}{x}\right)$.

4.33. Общее решение: $\ln(C(x + y)^2 + 1)) + y - x = 0$.

4.34. Общее решение: $2y^3 + xy - Cx = 0$, решение задачи Коши: $2y^3 + xy - 3x = 0$.

4.35. Общее решение: $y^3 + x^3 = C$, решение задачи Коши: $y^3 + x^3 = 2$.

4.36. Общее решение: $e^{-y/x} + \ln(C|x|) = 0$, решение задачи Коши: $e^{-y/x} + \ln(|x|/e) = 0$.

4.37. Решение задачи Коши: $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln|x| = 0$.

4.41. Общее решение: $y(x) = \dfrac{x^3}{2} + Cx$, решение задачи Коши: $y(x) = \dfrac{x^3}{2} + x$.

4.42. Общее решение: $y(x) = (x + C)\sin x$, решение задачи Коши: $y(x) = (x - \pi/2)\sin x$.

4.43. Общее решение: $y(x) = C\sin x - \cos x$, решение задачи Коши: $y(x) = \sin x - \cos x$.

4.44. Общее решение: $y(x) = (x + C)e^x$, решение задачи Коши: $y(x) = (x + 1)e^x$.

4.45. Общее решение: $y(x)=\dfrac{x^3+3x+C}{(x^2+1)^2}$, решение задачи Коши: $y(x)=\dfrac{x^3+3x+1}{(x^2+1)^2}$.

4.46. Общее решение: $y(x)=\left(-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C\right)e^{2x}$, решение задачи Коши: $y(x)=\left(-\dfrac{1}{3}e^{-3x}-\dfrac{2}{3}\right)e^{2x}$.

4.47. Общее решение: $y(x)=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2$, решение задачи Коши: $y(x)=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln|x|+1\right)^2$.

4.48. Общее решение: $y(x)=\dfrac{1}{x^2+Cx}$, решение задачи Коши: $y(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$.

4.49. Общее решение: $y(x)=\dfrac{1}{Ce^{-x^2/2}-x^2+2}$, решение задачи Коши: $y(x)=\dfrac{1}{e^{-x^2/2}-x^2+2}$.

4.50. Общее решение: $y(x)=Ce^{-x}+2x-2$, решение задачи Коши: $y(x)=3e^{-x}+2x-2$.

4.51. Общее решение: $y(x)=\dfrac{1}{Cx+\ln x+1}$, решение задачи Коши: $y(x)=\dfrac{1}{3x+\ln x+1}$.

4.52. Общее решение: $y(x)=\dfrac{1}{Ce^{-\sin x}-1}$, решение задачи Коши: $y(x)=\dfrac{1}{6e^{-\sin x}-1}$.

4.53. Общее решение: $y^2(x)\ln x=C+\sin x$, решение задачи Коши: $y^2(x)\ln x=\sin x-\sin e$.

4.54. Замена $t=\sin y$. Общее решение: $\sin y=x+Ce^{-x}$, решение задачи Коши: $\sin y=x+e^{-x}$.

4.55. Замена $t=\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$. Общее решение: $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=1-x+Ce^{-x}$, решение задачи Коши: $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=1-x-e^{-x}$.

4.56. Замена $t=\operatorname{tg} y$. Общее решение: $\operatorname{tg} y=(C+x^2)e^{-x^2}$, решение задачи Коши: $\operatorname{tg} y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

4.57. Общее решение: $y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(C - \ln|x|)x}$.

4.58. Общее решение: $y(x) = x + \frac{1}{Cx+1}$.

4.62. Общее решение: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C$, решение задачи Коши: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4$.

4.63. Общее решение: $\frac{x^2}{2} + x\ln|y| + y - \cos y = C$, решение задачи Коши: $\frac{x^2}{2} + x\ln|y| + y - \cos y = \frac{\pi}{2}$.

4.64. Общее решение: $xe^y + ye^x - 2y + 3x = C$, решение задачи Коши: $xe^y + ye^x - 2y + 3x = -1$.

4.65. Общее решение: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$, решение задачи Коши: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = 16$.

4.66. Общее решение: $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$, решение задачи Коши: $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = 48$.

4.67. Общее решение: $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$, решение задачи Коши: $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = \frac{4}{3}$.

4.68. Общее решение: $x^3y + x^2 - y^2 = Cxy$, решение задачи Коши: $x^3y + x^2 - y^2 = xy$.

4.69. Общее решение: $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$, решение задачи Коши: $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = -4$.

4.70. Общее решение: $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C$, решение задачи Коши:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = 1.$$

4.71. Общее решение: $x^2\ln y + \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3} = C$, решение задачи Коши: $x^2\ln y + \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

4.72. Общее решение: $e^x + 2\sqrt{y} - xy = C$, решение задачи Коши: $e^x + 2\sqrt{y} - xy = 1$.

4.73. Общее решение: $\sin x \sin y - \frac{1}{y} = C$, решение задачи Коши: $\sin x \sin y - \frac{1}{y} = 1$.

4.74. Общее решение: $\sin y + \frac{1}{x} + xy = C$, решение задачи Коши: $\sin y + \frac{1}{x} + xy = 0{,}5$.

4.75. Общее решение: $y^3 + x^3(\ln x - 1) = Cx^3$, решение задачи Коши: $y^3 + x^3(\ln x - 1) = -x^3$.

4.76. Общее решение: $4\sqrt{x} + \sin y - \cos x + y^2 = C$, решение задачи Коши: $4\sqrt{x} + \sin y - \cos x + y^2 = -1$.

4.81. $x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + C)$, $y = 2px + \frac{1}{p}$. **4.82.** $y = C + \frac{x^2}{C}$; $y = \pm 2x$.

4.83. $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$; $y = \frac{2C}{p} + \ln|p| - 2$.

4.84. $x = \ln|p| - \arcsin p + C$; $y = p - \sqrt{1 - p^2}$.

4.85. $x = \frac{2p + Cp^2 - 1}{2p^2(p-1)^2}$; $y = \frac{2p + Cp^2 - 1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{p}$.

4.86. $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2$.

4.87. $x = Cp^{-3} - 2e^p(p^{-1} - 2p^{-2} + 2p^{-3})$;
$y = 1{,}5Cp^{-3} - 2e^p(1 - 3p^{-1} + 3p^{-2})$.

4.88. $x^2 + y^2 = 25$; $y = Cx + 5\sqrt{1 + C^2}$.

4.89. $y = Cx + C^2$; $y = -0{,}25x^{-2}$. **4.90.** $y = Cx + C$.

4.91. $x = \frac{1}{3}(Cp^{-0,5} - p)$; $y = \frac{1}{6}(2Cp^{0,5} + p^2)$.

4.95. $\begin{cases} y = C_1x + C_2, \\ y = C_1 \sin x(C_2x + C_3), \\ y + \sqrt{y^2 + C_1} = C_2e^{C_3x}. \end{cases}$ **4.96.** $(1 + y^2)(C_1x + C_2) = 1$.

4.97. $y = C_1|x|^{C_2}$. **4.98.** $y = C_1e^x|x|^{C_2}$. **4.99.** $y = \sqrt[3]{C_1x^3 + C_2}$.

4.100. $y^2 = C_1 \ln|x| + C_2$.

4.101. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **4.102.** $y = \frac{1}{x}$. **4.103.** $y = -x^2 + 2x + 1$.

4.104. $y = 2x$. **4.105.** $y = \sin x - 2$. **4.106.** $y = e^{2x}$.

4.107. $y = e^{x-1}$. **4.108.** $y = \frac{\pi}{2} - x\sin x - 2\cos x$.

4.117. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \cos x + x$.

4.118. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x - 2\cos x$.

4.119. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 + 2x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

4.120. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x} + x^3 + 2x^2 + 2x + \sin x - \cos x$.

4.121. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin 2x + \frac{1}{16}e^{2x}$.

4.122. $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)e^{2x} - \cos x + x$.

4.123. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x} + \cos x + x^2$.

4.124. $y = C_1 e^{-x} + (C_2 \cos x + C_3 \sin x)e^{-3x} + xe^{-x}$.

4.125. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^{2x}\cos x + xe^{-x}$.

14.126. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} + \cos 2x + xe^{2x}$.

4.127. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \ln x$.

4.128. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (e^{x} - e^{2x})(x - \ln(1 + e^{x})) - e^{x}$.

4.129. $y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x + \sin x^2$.

4.130. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{x^2}$.

4.131. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}((\ln|\sin x|) \cdot \sin x - x\cos x)$.

4.146. $y = \frac{1}{1 + C_1}\sqrt{2x + C_2(1 + C_1)^2}$; $z = \frac{C_1}{1 + C_1}\sqrt{2x + C_2(1 + C_1)^2}$.

4.147. $y = \frac{C_1}{C_1 C_2 e^{C_1 x} + 1}$; $z = C_1 + 1 - \frac{C_1}{C_1 C_2 e^{C_1 x} + 1}$.

4.148. $y = \sqrt{\frac{2x}{1 + C_1^2} + C_2}$; $z = C_1\sqrt{\frac{2x}{1 + C_1^2} + C_2}$.

4.149. $y = \frac{C_1 x}{C_1 - 1} + C_1 C_2$; $z = \frac{x}{C_1 - 1} + C_2$.

4.150. $y = \sqrt{C_2 - 2C_1 x}$; $z = \frac{C_1}{\sqrt{C_2 - 2C_1 x}}$.

4.151. $u = \frac{1}{1 + C_1(C_2 - x)}$; $v = \frac{1}{C_2 - x}$; $w = \frac{1}{x - C_2 + C_3(x - C_2)^2}$.

4.152. $u = \frac{C_1}{C_1 x + C_2}$; $v = (C_1 x + C_2)(C_3 - C_1 x^2 - 2C_2 x)$; $w = C_1 x + C_2$.

4.153. $u = \sqrt{C_1}\operatorname{ctg}\sqrt{C_1}(C_3 - x)$; $v = \sqrt{C_1}\operatorname{tg}\sqrt{C_1}(C_3 - x)$;

$w = \frac{C_2}{2\sqrt{C_1}}\sin 2\sqrt{C_1}(C_3 - x)$.

4.154. $u = C_1 e^{C_2 e^x}$; $v = C_2 e^x$; $w = C_3 e^x - C_{21}$.

4.155. $u = \dfrac{C_3 e^x}{C_1 + C_3^3 e^{3x}}$; $v = \dfrac{C_1 + C_3^3 e^{3x}}{1 + C_2 (C_1 + C_3^3 e^{3x})}$; $w = C_3 e^x$.

4.156. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.157. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.158. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t + \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$.

4.159. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

4.160. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4.161. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.162. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.163. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$.

4.164. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

4.165. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) +$

$+ C_3 e^{2t} \left(\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

4.166. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sin 4t \\ \cos 4t + \sin 4t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 4t \\ \cos 4t - \sin 4t \end{pmatrix} +$

$+ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\cos 4t \cdot \ln \left| \frac{1+\sin 4t}{1-\sin 4t} \right| \\ (\sin 4t - \cos 4t) \cdot \ln \left| \frac{1+\sin 4t}{1-\sin 4t} \right| - 2 \end{pmatrix}.$

4.167. $x = C_1(2t+1)e^{-t} + 2C_2 e^{-t} + e^{-t}(2t \ln|t| + \ln|t| - 2t)$;
$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + te^{-t}(\ln|t| - 1)$.

4.168. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2t - \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{15} t^{\frac{5}{2}} \\ -\frac{8}{15} t^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}.$

4.169. $x = 2C_1 + C_2(2t+1) + \frac{1}{2} t^2 (2 \ln t - 1)$;

$y = C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{4}(2 \ln t - 1)$.

4.170. $x = (2C_1 + C_2)\cos 4t + (2C_2 - C_1)\sin 4t +$

$+ \cos 8t + 2 \sin 8t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos 4t}{1-\cos 4t} \right|$;

$y = -C_1 \cos 4t - C_2 \sin 4t - \sin 8t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos 4t}{1-\cos 4t} \right| \cdot \sin 4t.$

4.171. $x = -\frac{1}{3} e^{-t} + (t+2)e^t - \frac{5}{3} e^{2t}$; $y = -\frac{1}{12} e^{-t} - \frac{1}{4}(2t+7)e^t + \frac{5}{3} e^{2t}$.

4.172. $x = -e^{-7t} + 6e^{-2t} - 3e^t$; $y = -e^{-7t} - 4e^{-2t} + 5e^t$.

4.173. $x = 4(2te^t - e^{2t} + 1)$; $y = 4(2e^t - e^{2t} - 1)$; $y = 8te^t$.

4.174. $x = y = 0$; $z = 1 - e^{-t}$.

4.175. $x = e^{-t}$; $y = 0$; $z = -e^{2t}$.

4.186. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Неустойчивый узел.

4.187. $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$. Неустойчивый узел.

4.188. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Устойчивый узел.

4.189. $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$. Неустойчивое седло.

4.190. $\lambda_{1,2} = -5 \pm i$. Асимптотически устойчивый фокус.

4.191. $\lambda_{1,2} = 5 \pm i$. Неустойчивый фокус.

4.192. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Устойчивый центр.

4.193. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Неустойчивый узел.

4.194. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Устойчивый узел.

4.195. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Все точки оси OX являются точками покоя. Это предельный случай (случай 3b)) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \to 0$ — неустойчивый узел.

4.196. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Все точки оси OY являются точками покоя. Это предельный случай (случай 3b)) при $\lambda_2 \to 0$ — неустойчивый узел.

4.197. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$. Асимптотически устойчивый фокус.

4.198. $\lambda_{1,2} = 1 + 3i$. Неустойчивый фокус.

4.199. $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$. Неустойчивый узел.

4.200. $\lambda_{1,2} = \pm 7i$. Устойчивый центр.

4.207. Точка покоя асимптотически устойчива. Функция Ляпунова $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

4.208. Тривиальное решение асимптотически устойчиво. Функция Ляпунова $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 3y^2)$.

4.209. Точка покоя асимптотически устойчива. Функция Ляпунова $v(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2$.

4.210. Точка покоя устойчива. Функция Ляпунова $v(x, y) = x^4 + y^4$.

4.211. Точка покоя устойчива. Функция Ляпунова $v(x, y) = x^2 + y^2$.

4.212. Точка покоя асимптотически устойчива. Функция Ляпунова $v(x, y) = 4x^2 + 3y^2$.

4.213. Точка покоя неустойчива. Функция $v(x, y) = y^2 - x^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева.

4.214. Точка покоя неустойчива. Функция $v(x, y) = y^2 - x^4$ удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева.

4.215. Точка покоя неустойчива. Функция $v(x, y) = 5x^4 - 5y^4$ удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева.

4.216. Точка покоя неустойчива. Функция $v(x, y) = x^2 + y^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева.

4.217. Точка покоя неустойчива. Функция $v(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева.

4.218. Линеаризованная система: $\frac{dx}{dt} = -x$, $\frac{dy}{dt} = x$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \lambda = 0$. Корни: $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = 0$, точка покоя неустойчива.

4.219. Линеаризованная система: $\frac{dx}{dt} = x + y$, $\frac{dy}{dt} = 4y + x$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$. Корни:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} > 0,$$

точка покоя неустойчива.

4.220. Линеаризованная система: $\frac{dx}{dt} = x + \frac{1}{5}y$, $\frac{dy}{dt} = -9x + \frac{y}{4}$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{41}{20} = 0$. Корни:

$$\lambda_1 = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{21}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{21}}{2} > 0,$$

точка покоя устойчива.

4.221. Линеаризованная система: $\frac{dx}{dt} = -x + y$, $\frac{dy}{dt} = -x - y$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Корни: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, точка покоя устойчива.

4.224. Стационарное решение $y = 1$ устойчиво.

4.225. Стационарное решение $y = -1$ устойчиво.

4.226. Стационарное решение $y = 1$ устойчиво.

4.227. Стационарное решение $y = 1$ неустойчиво; стационарное решение $y = 2$ неустойчиво.

4.228. Стационарное решение $y = -2$ устойчиво; стационарное решение $y = -4$ устойчиво.

4.229. Стационарное решение $y = 0$ неустойчиво; стационарное решение $y = -5$ устойчиво.

4.230. Стационарное решение $y = 0$ устойчиво; стационарное решение $y = 5$ неустойчиво.

4.231. Стационарное решение $y = -2$ устойчиво.

4.232. Стационарное решение $y = 2$ устойчиво.

4.233. Стационарное решение $y = 0$ устойчиво; стационарное решение $y = 1$ неустойчиво.

4.234. Стационарное решение $y = -2$ устойчиво; стационарное решение $y = 1$ устойчиво.

4.235. Стационарное решение $y = 2$ устойчиво; стационарное решение $y = 5$ устойчиво.

4.236. Стационарное решение $y = -1$ устойчиво; стационарное решение $y = 1$ устойчиво; стационарное решение $y = 0$ устойчиво.

4.237. Стационарное решение $y = 0$ устойчиво.

4.238. Стационарное решение $y = -1$ устойчиво; стационарное решение $y = 1$ неустойчиво.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонов, С. А.* Дифференциальные уравнения : учеб. для вузов / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т. В.Муратова / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997.
2. *Болгов, В. А.* Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.] / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. Изд. 2-е. — М. : Наука, 1966.
3. *Бугров, Я. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1984.
4. *Бугров, Я. С.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1985.
5. *Виноградова, И. А.* Математический анализ в задачах и упражнениях / И. А. Виноградова, С. П. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Наука, 1991.
6. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М. : Физматлит, 2005.
7. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. — М. : Высшая школа, 1964.
8. *Краснов, М. Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М. : Наука, 1971.
9. *Краснов, М. Л.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М. : Высшая школа, 1978.
10. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1965.
11. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. — М. : Наука, 1978.

12. *Романко, В. К.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко [и др.] — М. : Физматлит, 2002.
13. *Романовский, П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. — М. : Наука, 1973.
14. *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексного переменного / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1967.
15. *Сидоров, Ю. В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. — М. : Высшая школа, 1985.
16. *Тихонов, А. Н.* Дифференциальные уравнения / серия «Курс высшей математики и математической физики» / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. — М. : Наука, 1979.
17. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М. : ЛКИ, 2008.
18. *Фукс, Б. А.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1964.
19. *Эльсгольц, Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / серия «Курс высшей математики и математической физики». — М. : Наука, 1969.
20. *Эрроусмит, Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. — М. : Платон, 1997.
21. Гелбаум, Б. Контпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. — М. : Мир, 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1
Кратные интегралы и их приложения 5
1.1. Двойные интегралы 5
1.1.1. Жорданова мера плоской области Ω 5
1.1.2. Двойной интеграл Римана по прямоугольнику D . . 7
1.1.3. Двойной интеграл Римана по произвольному измеримому по Жордану множеству 8
1.1.4. Основные свойства интеграла Римана на измеримом по Жордану множестве Ω 9
1.1.5. Приведение двойного интеграла к повторному 10
1.1.6. Общее определение двойного интеграла 14
1.1.7. Замена переменных в двойном интеграле Римана . 15
1.2. Тройные интегралы 18
1.2.1. Мера Жордана пространственной области 18
1.2.2. Тройной интеграл Римана по измеримому множеству Ω 20
1.2.3. Замена переменных в тройном интеграле 22
1.3. Применение двойных и тройных интегралов 29
1.3.1. Геометрические применения 29
1.3.2. Физические применения двойных и тройных интегралов 31
1.4. Общие кратные интегралы 32
1.5. Несобственные кратные интегралы 34
1.6. Задачи с решениями к главе 1 39
1.7. Задачи к главе 1 79

Глава 2
Криволинейные и поверхностные интегралы. Основы векторного анализа 90
2.1. Криволинейные интегралы I рода 90
2.2. Криволинейные интегралы II рода 95
2.3. Поверхностные интегралы I рода 101
2.4. Поверхностные интегралы II рода 105

2.5. Формула Грина 110
2.6. Формула Гаусса–Остроградского 113
2.7. Формула Стокса 115
2.8. Основные операции векторного анализа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 117
2.9. Задачи с решениями к главе 2 119
2.10. Задачи к главе 2 155

Глава 3
Теория функций комплексной переменной 165
3.1. Определение комплексного числа 165
3.2. Действия над комплексными числами 165
3.3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел ... 167
3.4. Извлечение корня из комплексного числа 170
3.5. Последовательность комплексных чисел и ее предел ... 173
3.6. Определение функции комплексной переменной 174
3.6.1. Основные понятия 174
3.6.2. Предел функции комплексной переменной 185
3.6.3. Непрерывность функции комплексной переменной 191
3.7. Производная и дифференциал функции комплексной переменной 192
3.8. Элементарные функции комплексной переменной 194
3.9. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной 212
3.10. Интеграл от функции комплексной переменной 213
3.11. Интегральная теорема Коши 215
3.11.1. Теорема Коши 215
3.11.2. Первообразная и неопределенный интеграл 216
3.12. Интегральная формула Коши 219
3.12.1. Интегральная формула Коши 219
3.12.2. Формула для производных 219
3.13. Ряды функций комплексной переменной 224
3.13.1. Основные определения и понятия 224
3.13.2. Равномерная сходимость 226
3.13.3. Свойства равномерно сходящихся рядов 226
3.13.4. Степенные ряды. Теорема Абеля 227
3.13.5. Ряд Тейлора 229
3.13.6. Представление некоторых элементарных функций комплексной переменной степенными рядами 229
3.13.7. Ряд Лорана 235
3.13.8. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции и их классификация .. 236
3.13.9. Нули аналитической функции 238
3.13.10. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке 241
3.13.11. Логарифмический вычет функции. Принцип аргумента 246
3.14. Определение преобразования Лапласа 248

3.14.1. Свойства преобразования Лапласа 250
3.14.2. Формула обращения 252
3.14.3. Теорема разложения 252
3.14.4. Теорема о предельных значениях 254
3.14.5. Нахождение изображений функций непосредственно с помощью определения и с использованием таблиц изображений 254
3.14.6. Изображение производных и интеграла от оригинала 257
3.14.7. Отыскание оригинала по изображению 257
3.14.8. Применение операционного исчисления к решению некоторых дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений 260
3.14.9. Справочные таблицы 264
3.15. Задачи для самостоятельного решения 266

Глава 4
Обыкновенные дифференциальные уравнения 273
4.1. Основные понятия и теоремы 273
4.2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка 275
4.2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 275
4.2.1.1. Задачи с решениями 276
4.2.1.2. Задачи для самостоятельного решения .. 278
4.2.2. Однородные уравнения и приводящиеся к ним .. 278
4.2.2.1. Задачи с решениями 281
4.2.2.2. Задачи для самостоятельного решения .. 284
4.2.3. Линейные ОДУ первого порядка с ненулевой правой частью. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати 285
4.2.3.1. Задачи с решениями 289
4.2.3.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами 294
4.2.4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 295
4.2.4.1. Задачи с решениями 298
4.2.4.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами 301
4.2.5. ОДУ, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро 302
4.2.5.1. Задачи с решениями 304
4.2.5.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами 307
4.3. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков 308
4.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка 308
4.3.1.1. Задачи с решениями 309

4.3.1.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами ... 311
4.3.2. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами ... 311
4.3.2.1. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определители Вронского и Грамма ... 311
4.3.2.2. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и нулевыми правыми частями ... 313
4.3.2.3. Задачи с решениями ... 315
4.3.3. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью ... 317
4.3.3.1. Задачи с решениями ... 320
4.3.3.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами ... 323
4.4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 324
4.4.1. Основы теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений ... 324
4.4.2. Примеры систем дифференциальных уравнений с решениями ... 334
4.4.3. Задачи для самостоятельного решения ... 355
4.5. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений ... 358
4.5.1. Устойчивость по Ляпунову ... 358
4.5.1.1. Задачи с решениями ... 362
4.5.1.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами ... 365
4.5.2. Второй метод Ляпунова ... 366
4.5.2.1. Задачи с решениями ... 368
4.5.2.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами ... 371
4.5.3. Исследование на устойчивость с помощью абсолютной погрешности ... 372
4.5.3.1. Задачи с решениями ... 373
4.5.3.2. Задачи для самостоятельного решения с ответами ... 376

Расчетно-графические задания ... 379
Ответы ... 417
Список литературы ... 440